A1. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 1, a kúp magassága pedig 3. A kúpba egy kockát írunk oly módon, hogy az alapkör tartalmazza a kocka egy lapját. Mekkora a kocka éle?

A2. Az egységnyi sugarú kör s íve teljes egészében az első síknegyedben fekszik. Az ív és az x-tengely közti tartomány területe A, az ív és az y-tengely közti tartomány területe pedig B. Bizonyítsuk be, hogy $A+B$ csak az s ív hosszától függ, annak helyzetétől nem.

A3. Legyen az f olyan függvény, amelynek a harmadik deriváltja folytonos. Bizonyítsuk be, hogy van olyan a szám, amelyre

$$f(a)\cdot f'(a)\cdot f''(a)\cdot f'''(a)\geq 0.$$

A4. Legyen $A_1=0$ és $A_2=1$. Ha $n>2$, akkor A_n-et az A_{n-1} és az A_{n-2} számok tízes számrendszerbeli alakjának a felírás szerinti összefűzésével kapjuk. Például $A_3=A_2A_1=10$, $A_4=A_3A_2=101$, $A_5=A_4A_3=10110$ és így tovább. Az n milyen értékeire lesz A_n osztható 11-gyel?

A5. Az $\mathcal{F}$ olyan nyílt körlemezek egy véges rendszere a síkban, amelyek egyesítése lefedi a sík egy E részhalmazát. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}$-nek létezik olyan páronként diszjunkt $D_1,\ \ldots,\ D_n$ körlemezekből álló részrendszere, hogy

$$\bigcup_{j=1}^{n} 3D_j \supseteq E.$$

A fenti jelölésben, ha D az r sugarú P középpontú kör, akkor $3D$ a $3r$ sugarú P középpontú kör.

A6. Legyenek A, B és C a sík különböző, egész koordinátájú pontjai. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(|AB|+|BC|)^2<8\cdot[ABC]+1,$$

akkor A, B és C egy négyzet három csúcsa. A fentiekben $|XY|$ az XY szakasz hosszát, $[ABC]$ pedig az ABC háromszög területét jelöli.

B1. Mekkora az $\dfrac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$ tört minimuma, ha $x>0$?

B2. Adott $(a,\ b)$ koordinátájú pontra, ahol $0<b<a$ keressük meg azon háromszögek kerületének a minimumát, amelyek egyik csúcsa az $(a,\ b)$ pont, a másik az x-tengelyen, a harmadik pedig az $y=x$ egyenesen van. Bizonyítás nélkül föltehető, hogy a szóban forgó minimum létezik.

B3. Legyen H az egységnyi sugarú félgömb, $\{(x,\ y,\ z)\ :\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$, C az egység sugarú kör $\{(x,\ y,\ 0)\ :\ x^2+y^2=1\}$, P pedig a C-be írt szabályos ötszög. Mekkora a H azon részének a felszíne, amelyik a síkbeli P tartomány „fölött” van? A választ írjuk $A\sin\alpha+B\cos\beta$ alakban, ahol A, B, α és β valós számok.

B4. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az n és m pozitív egészekre fennálljon a

$$\sum_{i=0}^{mn-1}(-1)^{\lfloor\frac{i}{m}\rfloor+\lfloor\frac{i}{n}\rfloor}=0$$

egyenlőség?

B5. Az N pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja 1998 darab egyesből áll: $N=\underbrace{111\ldots11}_{1998\text{ jegy}}$. Mi $\sqrt{N}$ ezredik tizedesjegye?

B6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c egész számokhoz létezik olyan pozitív egész n, amelyre $\sqrt{n^3+an^2+bn+c}$ nem egész.