1. Csak olyan x szám lehet megoldás, amelyre $\sqrt{x-1}+x-3 \geq 0$, azaz $x \geq 2$. Legyen $x-3=z$ és $\sqrt{x-1}=y$ (>0). Ekkor $y+z \geq \sqrt{2y^2+2z^2}$, ami ekvivalens az $y^2+z^2+2yz \geq 2y^2+2z^2$ és így az $(y-z)^2 \leq 0$ egyenlőtlenséggel; tehát $y=z$, $\sqrt{x-1}=x-3$, $x-1-\sqrt{x-1}-2=0$, $\sqrt{x-1}=2$ (hiszen $\sqrt{x-1}>0$), $x=5$. Az adott egyenlőtlenséget egyetlen szám, $x=5$ elégíti ki.

2. Jelölje a BPC, illetve a DPA háromszögek területét t_2, illetve t_4, a négyszög területét T.

Mivel egyrészt $T=t_1+t_2+t_3+t_4$, másrészt $T=t_1+t_3+2\sqrt{t_1t_3}$, azért $t_2+t_4=2\sqrt{t_1t_3}$.

Legyen $AP=e_1$, $PC=e_2$, $BP=f_1$, $PD=f_2$.

Az egyenlő magasságú háromszögek területének arányára vonatkozó állítás alkalmazásával:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{e_1}{e_2} \quad \text{és} \quad \frac{t_4}{t_3}=\frac{e_1}{e_2}, \qquad \text{tehát} \quad t_1t_3=t_2t_4.$$

Így $t_2+t_4=2\sqrt{t_2t_4}$, $\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_4}\right)^2=0$, azaz $t_2=t_4$.

Ha az átlók szöge φ, akkor $t_2=\frac{1}{2}e_2f_1\sin\varphi$ és $t_4=\frac{1}{2}e_1f_2\sin\varphi$, amiből $e_1f_2=e_2f_1$, $\frac{e_1}{f_1}=\frac{e_2}{f_2}$. Az APB és a CPD háromszögek tehát hasonlók, $PAB\sphericalangle=PCD\sphericalangle$, ezért AB párhuzamos CD-vel, azaz a négyszög valóban trapéz.

3. Szorozzuk meg $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$-vel az egyenlet mindkét oldalát, a bal oldalon alakítsunk szorzattá.

$$(2\sin x\cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=1, \qquad \sin 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

a) $\sin 2x=1$ és $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ vagy b) $\sin 2x=-1$ és $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

a) $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ *és* $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, ilyen x tehát nincs;

b) $2x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ *és* $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $x=\frac{7\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

Az egyenlet megoldásai az $x=\frac{7\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ számok.

4. Az igazolandó egyenlőség ekvivalens a következőkkel:

$$\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta+\cos\gamma\sin\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Így elegendő ez utóbbit igazolni.

Mivel $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$, és felhasználva, hogy $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$, $2\gamma=360^\circ-2(\alpha+\beta)$,

$$\sin 2\gamma=-\sin 2(\alpha+\beta)=-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta),$$

tehát

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=2\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))=$$
$$=2\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))\cdot 2\sin\alpha\sin\beta=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Rábai Imre