

1. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $2^x + \sqrt{2^{x+2} \cdot 5^x} = 3 \cdot 5^x$; b) $\frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5}$;

c) $2 \sin 2x + 2 \sin x = 2 \cos x + 1$.

2. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

a) $(x + 1)(|x| - 1) \leq -\frac{1}{2}$; b) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \geq -2$;

c) $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) > 2$.

3. Tekintsük a $4x - 3y + 20 = 0$ egyenletű e egyenest és az $x_0 = -2$ abszcisszájú E pontját. A k kör sugara 10 egység, és az e egyenest az E pontban érinti.

a) Számítsa ki az \overrightarrow{EK} és \overrightarrow{OK} vektorok koordinátáit, ha K a k kör középpontja, O pedig az origó.

b) Írja fel a k kör egyenletét.

4. Igazolja, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$) egyenlet két gyökének aránya pontosan akkor (akkor és csak akkor) $3 : 2$, ha $6b^2 = 25ac$.

5. Az $ABCD$ téglalapban $2 \cdot AB = 3 \cdot BC$. Az AB oldal *egyenesének* egy P pontjától a C , illetve D csúcsok távolsága $8\sqrt{2}$, illetve $4\sqrt{5}$ egység. Számítsa ki a téglalap oldalainak hosszát. Hová esik a P pont?

6. Igazolja, hogy egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha $\sin \gamma = \cos \alpha + \cos \beta$, ahol γ a háromszög egyik hegyesszöge.

7. Oldja meg az $x^{1+\log_a x} > a^2 x$ egyenlőtlenséget, ahol $a > 0$, $a \neq 1$ valós paraméter.

8. Határozza meg az

$$f(x, y) = x^4 + 4y^4 + \frac{1}{x^2 y^2}$$

kifejezés legkisebb helyettesítési értékét! Mely $(x; y)$ számpárok esetén veszi fel $f(x; y)$ a legkisebb értékét?

Rábai Imre