1. feladat. Megmutatjuk, hogy létezik a feladat követelményeinek eleget tevő sorozat. Legyen ugyanis $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, p_3, ... a prímszámok (végtelen) növekvő sorozata, és tekintsük az $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_n = 15 \cdot p_{n+1}$ $(n \geq 3)$ sorozatot.

Ebben a sorozatban a_n páratlan szám, ha $n \geq 3$, így nem osztható sem a_1-gyel, sem a_2-vel, hiszen azok páros számok. Az is világos, hogy a_1 és a_2 közül egyik sem osztója a másiknak. Ha pedig $n \geq 3$, akkor p_{n+1} osztója a_n-nek, de nem osztója a sorozat egyetlen további tagjainak sem, tehát a_n nem lehet osztója a sorozat egy másik elemének. Az első feltétel tehát teljesül.

A sorozatban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója. Valóban: a_1 és a_2 esetén ez a szám 2; a_1 és a_n esetén 3, ha $n \geq 3$, végül ha n, $m \geq 2$, akkor a_n és a_m is osztható 5-tel. Tehát a második feltétel is teljesül.

Végezetül, ha egy pozitív egész osztója a sorozat minden elemének, akkor osztója a_1-nek és a_2-nak is, és így csak 1 vagy 2 lehet. A második lehetőség azonban könnyen kizárható, hiszen a_3 páratlan szám. Ezzel igazoltuk, hogy a sorozat a harmadik feltételt is kielégíti.

Megjegyzések. 1. A fenti sorozatban a második tagtól kezdve minden elem osztható 5-tel. Olyan sorozat is megadható, amelyben a sorozat elemeinek semelyik tagtól kezdve nem létezik 1-nél nagyobb közös osztója. Ilyen sorozat például az $a_{3n+1} = 6p_{n+4}$, $a_{3n+2} = 10p_{n+4}$, $a_{3n+3} = 15p_{n+4}$ $(n \geq 0)$ összefüggésekkel definiálható. Az is világos azonban, hogy bármely, a feladat feltételeinek eleget tevő sorozatban lesz végtelen sok elem, amelynek van 1-nél nagyobb közös osztója. (Miért?)

2. A sorozat konstrukciójánál mindenképpen szükség van végtelen sok különböző prímszám segítségére. Nem lehet ugyanis megadni véges sok prímszámot úgy, hogy legyen olyan pozitív egészekből álló végtelen sorozat, amelyben egyik szám sem osztója egyetlen másiknak sem, és amelyben minden szám összes prímosztója az adott prímszámok közül való.

Feladat. Bizonyítsuk be a fenti állítást.

2. feladat. Először olyan p polinomot mutatunk, amely az egymástól különböző a_1, a_2, ..., a_n helyeken rendre az egymástól nem feltétlenül különböző b_1, b_2, ..., b_n értékeket veszi fel. Ehhez tekintsük $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén a következő p_i polinomot:

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i 1 \leq j \leq n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Világos, hogy $p_i(a_i) = 1$ és $p_i(a_j) = 0$, ha $j \neq i$. Ezért a $p(x) = b_1 \cdot p_1(x) + \cdots + b_n \cdot p_n(x)$ összefüggéssel definiált polinom, az ún. *Lagrange*-féle interpolációs polinom, megfelelő lesz. Könnyen látható, hogy ezen p polinom fokszáma legfeljebb $n - 1$. Azonban p még akkor sem lesz mindig egész együtthatós, ha a_1, ..., a_n és b_1, ..., b_n egész számok.

Legyen most $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$. Milyen b_1, ..., b_n egész értékek mellett tudunk egyszerűen következtetni arra, hogy a p polinom együtthatói egész számok? A p polinom minden együtthatója olyan racionális szám, amelynek a nevezője valamilyen $1 \leq i \leq n$ indexre

$$\prod_{j \neq i 1 \leq j \leq n} (a_i - a_j) = (i-1)(i-2)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1))\ldots(i-n) == (-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!$$

alakú, számlálója pedig ugyanekkor b_i-vel osztható egész szám. Könnyen látható, hogy az így adódó nevezők mindegyike osztója az $N = [(n-1)!]^2$ számnak. Ha tehát a b_i értékek mindegyike osztható N-nel, akkor a fenti konstrukcióval létrehozott p polinom egész együtthatós lesz.

Az általunk keresett polinomnak azonban az előírt helyeken 2-hatvány értékeket kell felvennie, azok pedig nem oszthatók N-nel, ha $n \geq 4$. Hogyan lehet ezen segíteni? Válasszunk ki n darab különböző 2-hatványt, ami ugyanannyi – mondjuk m – maradékot ad N-nel osztva. Ezt megtehetjük, hiszen végtelen sok különböző 2-hatvány van. Legyenek ezek c_1, c_2, ..., c_n, és tekintsük a $b_i = c_i - m$ $(1 \leq i \leq n)$ számokat. Ezekre igaz, hogy b_i osztható N-nel, létezik tehát olyan egész együtthatós polinom, amelyre $p(i) = b_i$ minden 1 és n közé eső i egész számra. Ennek a p polinomnak konstans tagját m-mel megnövelve olyan, továbbra is egész együtthatós p^* polinomhoz jutunk, amelyre $p^*(i) = c_i$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A megoldásból kitűnik, hogy különböző 2-hatványok helyett különböző 3-hatványokat vagy éppen különböző prímszámokat is előírhattunk volna a keresett polinom 1, 2, ..., n helyen felvett értékeiként. Sőt, még ennél is tovább mehetünk. Mivel

$$\binom{n-1}{i-1} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$$

egész szám, az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$ alappontokra épített Lagrange-féle interpolációs polinom együtthatói már akkor is egész számok, ha minden b_i osztható $(n-1)!$-sal. A skatulya-elv szerint $(n-1)(n-1)! + 1$ szám között mindig található n olyan, amelyik $(n-1)!$-sal osztva ugyanolyan maradékot ad. Megfogalmazhatjuk tehát a következő, a feladatban szereplőnél erősebb állítást.

Legyen H egy legalább $(n-1)(n-1)! + 1$ elemű egész számokból álló halmaz. Ekkor létezik olyan, legfeljebb $(n-1)$-ed fokú egész együtthatós polinom, amelynek az 1, 2, ..., n helyeken felvett értékei a H különböző elemei.

3. feladat. Tekintsünk egy N elemű H ponthalmazt, amely megfelel a feladatban szereplő feltételeknek. Tegyük fel, hogy H konvex burkának n csúcsa van. Ezt a konvex n-szöget egy csúcsából kiinduló átlói segítségével $n-2$ háromszögre bonthatjuk, amelyek mindegyikében H-nak pontosan egy pontja helyezkedik el, a második feltétel értelmében. Egy ilyen háromszög határára – az első feltétel miatt – H-nak nem eshet más pontja, mint a szóban forgó háromszög 3 csúcsa. A H halmaz tehát pontosan a konvex burkának a csúcspontjaiból és az előbb említett $n-2$ pontból áll. Ennek következtében $N = 2n-2 = 2(n-1)$, azaz páros szám.

A következőkben megmutatjuk, hogy minden 3-nál nagyobb N páros szám esetén megadható a síkon N pont a követelményeknek megfelelően. Legyen $n = \dfrac{N+2}{2}$, ekkor $n \geq 3$. Tekintsünk egy tetszőleges $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ konvex n-szöget. Ennek a belsejében vegyünk fel $n-2$ további pontot a következőképpen. Minden $1 \leq i \leq n-2$ esetén legyen Q_i a $P_0P_iP_{n-1}$ és $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ háromszögek közös részének tetszőleges belső pontja. Azt állítjuk, hogy a $H = \{P_0,\ P_1,\ \dots,\ P_{n-1},\ Q_1,\ \dots,\ Q_{n-1}\}$ ponthalmaz megfelel a feltételeknek.

Legyen $0 \leq i < j < k \leq n-1$. Azt állítjuk, hogy a $P_iP_jP_k$ háromszög belseje H pontjai közül egyedül a Q_j pontot tartalmazza. Először azt mutatjuk meg, hogy Q_j valóban a $P_iP_jP_k$ háromszög belső pontja. A $P_iP_jP_k$ szögtartomány tartalmazza a P_0, P_j, P_{n-1} pontokat, és így a $P_0P_jP_{n-1}$ háromszög minden pontját is. Minthogy Q_j ennek a háromszögnek belső pontja, Q_j a $P_iP_jP_k$ szögtartomány belsejében van (*1. ábra*).

Hasonlóképpen látható, hogy Q_j a P_iP_k egyenesre támaszkodó, P_j-t tartalmazó félsík belsejében található, hiszen ez a félsík tartalmazza a P_{j-1}, P_j, P_{j+1} pontokat, és Q_j a $P_{j-1}P_jP_{j+1}$ háromszög belső pontja (*2. ábra*).

A Q_j pont tehát az *1. ábrán* látható nyílt szögtartomány és a *2. ábrán* látható nyílt félsík közös részében van, ez pedig éppen a $P_iP_jP_k$ háromszög belső pontjainak halmaza. Most megmutatjuk, hogy ez a halmaz H pontjai közül a Q_j-n kívül egyetlen pontot sem tartalmaz. A $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ sokszög konvex, ezért egyik csúcsa sem eshet a $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe. Tekintsük most valamelyik Q_l pontot, ahol $l \neq j$. Ez a pont a $P_{l-1}P_lP_{l+1}$ háromszög belsejében helyezkedik el. Ha $l < i$, akkor a P_0P_i egyenes elválasztja ezt a háromszöget a $P_iP_jP_k$ háromszögtől, tehát Q_l valóban nem eshet az utóbbi háromszög belsejébe. Az $i < l < j$, $j < l < k$, illetve $k < l$ esetekben a megfelelő elválasztó egyenesek rendre a P_iP_j, P_jP_k és P_kP_{n-1} egyenesek. A *3. ábra* az $l = j-1$ esetet szemlélteti. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Hátravan még annak igazolása, hogy H pontjai közül semelyik három nem esik egy egyenesre. A konstrukcióból azonnal következik, hogy semelyik P_iP_j egyenes nem illeszkedhet H-nak egyetlen további pontjára sem. Ha tehát egy egyenes H pontjai közül hármat is tartalmazna, akkor tartalmaznia kellene legalább két Q típusú pontot. Legyenek ezek Q_s és Q_t. A Q_sQ_t egyenes a $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ sokszög kerületét két pontban metszi, jelöljük ezeket U-val és V-vel. Ha ezek közül az egyik, mondjuk U a sokszög P_i csúcsa volna, akkor V szükségképpen a sokszög valamely P_jP_k oldalának belső pontja lenne. Ekkor a $P_iP_jP_k$ háromszög a Q_s és a Q_t pontokat is tartalmazná, fenti állításunkkal ellentétben. Ha pedig U és V rendre a sokszög P_iP_j és P_kP_l oldalainak lenne belső pontja (feltehető, hogy P_i, P_j, P_k és P_l ilyen sorrendben, egy konvex négyszög csúcsai), akkor H-nak összes pontja, amely a Q_sQ_t egyenesre illeszkedik, a $P_iP_jP_kP_l$ négyszög belsejébe esne. Ez azonban lehetetlen, hiszen a fenti állításból könnyen levezethető, hogy ez a négyszög H-nak pontosan két pontját tartalmazza.

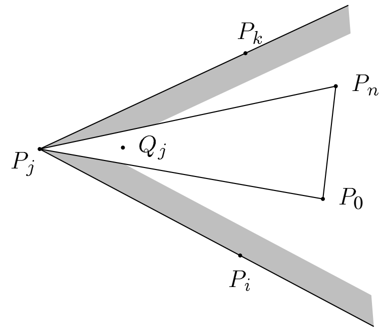
Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

Megjegyzések. 1. Páros N esetén a keresett ponthalmaz létezésére indukciós bizonyítás is adható, amelyet csak vázolunk. Tegyük fel, hogy a $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ konvex sokszöget, és annak $Q_1, \dots, Q_{n-2}$ belső pontjait már meghatároztuk úgy, hogy semelyik 3 pont nem esik egy egyenesre, és minden $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe pontosan egy Q pont esik. Vegyük fel a P_n pontot úgy, hogy $P_0P_1 \dots P_{n-1}P_n$ konvex $(n+1)$-szög legyen, semelyik $P_nP_iP_{n+1}$ háromszög ne tartalmazzon egyetlen Q_j pontot sem, továbbá P_n ne legyen rajta egyik olyan egyenesen sem, amely az eddigi pontok közül kettőre már illeszkedik. „Látszik”, hogy ezt mindig megtehetjük. A szabatos bizonyítás megfogalmazása azonban egyáltalán nem magától értetődő. Ezek után vegyük fel a Q_{n-1} pontot a $P_{n-1}P_iP_n$ $(0 \leq i \leq n-1)$ háromszögek közös részeinek belsejében, ami éppen a $P_{n-1}P_0P_n$ és $P_{n-1}P_{n-2}P_n$ háromszögek közös részének belseje. Eközben vigyázunk arra, hogy Q_{n-1} ne essék egyetlen olyan egyenesre sem, amelyeket az eddigi pontok meghatároznak. A keletkező $\{P_0,\ P_1,\ \dots,\ P_n,\ Q_1,\ \dots,\ Q_{n-1}\}$ ponthalmaz konvex burka éppen a $P_0P_1 \dots P_n$ sokszög, és semelyik 3 pontja nem esik egy egyenesre. Az indukciós feltevésből adódik, hogy a $P_iP_jP_k$ belsejébe pontosan egy pont esik, ha $n \notin \{i,\ j,\ k\}$. A Q_{n-1} pont konstrukciója alapján ugyanez elmondható a $P_{n-1}P_nP_i$ háromszögekről is. Végül tekintsük bármelyik $P_iP_jP_k$ háromszöget, ahol $i < j < n-1$. A $P_iP_jP_{n-1}P_n$ négyszögbe, melyet annak P_jP_{n-1} átlója a $P_nP_{n-1}P_j$ és a $P_{n-1}P_jP_i$ háromszögekre bont, az előzőek alapján pontosan 2 pont esik. Ezek egyike a Q_{n-1} pont, amely a $P_{n-1}P_nP_i$ háromszög egyetlen belső pontja a tekintett pontok közül. Ezért a másik pont szükségképpen a $P_iP_jP_{n-1}$ háromszögbe esik, és oda más pont nem is eshet (*4. ábra*).

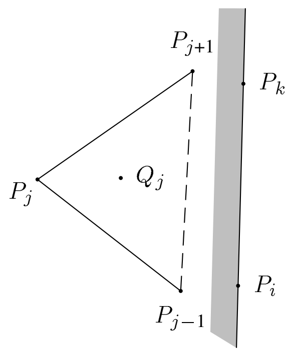
2. Ha az $n = 3$ esetén felrajzolható, lényegében egyértelmű konstrukcióból kiindulunk, és arra a fenti indukció lépéseit alkalmazzuk, akkor az első megoldásban ismertetett konstrukcióhoz hasonló pontrendszerhez jutunk. Felmerülhet az a gondolat, hogy lehetséges-e „geometriailag más szerkezetű” ponthalmazokat is mutatni, amelyek a feltételeknek szintén megfelelnek. Ilyen ponthalmazokat is képezhetnénk az indukciós eljárás segítségével, ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a P_0, P_1, $\dots$, P_n csúcspontokkal rendelkező konvex sokszög csúcsai éppen ilyen sorrendben kövessék egymást.

Az *5. ábrán* három különböző konstrukciót mutatunk $N = 10$ $(n = 6)$ esetén.

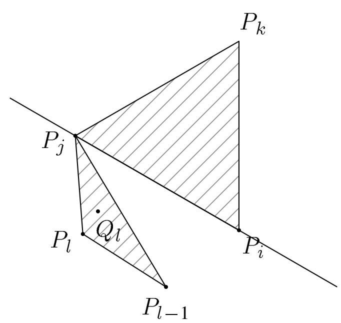
Károlyi Gyula



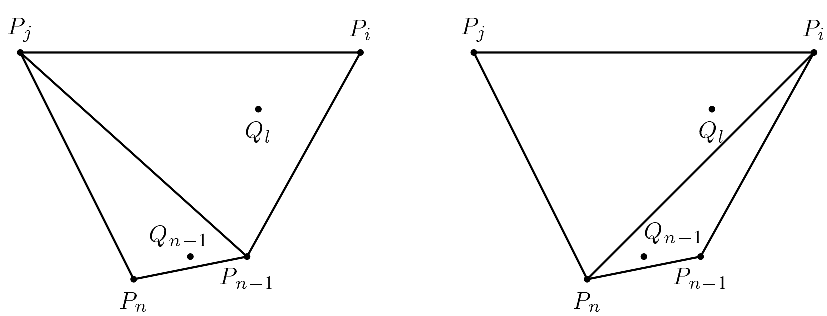
P_k
P_{n-1}
P_j
Q_j
P_0
P_i



P_{j+1}
P_k
P_j
Q_j
P_{j-1}
P_i



P_k
P_j
P_l
Q_l
P_i
P_{l-1}



P_j
P_i
Q_l
Q_{n-1}
P_n
P_{n-1}
P_j
P_i
Q_l
Q_{n-1}
P_n
P_{n-1}