A számsíkon az egész koordinátájú pontokat *rácspontoknak* nevezzük. Megpróbáljuk megmondani, hány rácspont van az origú középpontú, r sugarú körben. Ezt a számot a továbbiakban $N(r)$ fogja jelölni.

Mivel általában egységnyi területre esik egy rácspont, azt várjuk, hogy $N(r)$ körülbelül akkora lesz, mint a kör területe, vagyis πr^2. Ez a gondolat az alábbi módon önthető egzakt formába. Minden egyes rácspont köré írjunk a tengelyekkel párhuzamos oldalú egységnégyzetet. Ezek hézagtalanul lefedik a síkot. Ha közülük csak azokat tekintjük, amelyek középpontja az r sugarú körbe esik, ezek összterülete éppen $N(r)$. Mivel egy ilyen négyzet pontjainak legnagyobb távolsága a négyzet középpontjától $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a fenti alakzat benne lesz az origó körüli $r+\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú körben. Hasonlóan, mivel a körön kívüli középpontú négyzetek csak $\frac{\sqrt{2}}{2}$ mélységig tudnak a körbe benyúlni, alakzatunk tartalmazza az $r-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú kört. Így

$$\pi\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le N(r) \le \pi\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

vagyis a $\Delta(r)=N(r)-\pi r^2$ jelöléssel

$$|\Delta(r)| \le \sqrt{2}\pi r + \frac{1}{2} < 5r. \tag{1.1}$$

Ez az érvelés alig használt valamit a kör tulajdonságaiból, és csipetnyi változtatással szinte minden alakzatra elmondható. Vessük össze pl. a kört a köré írt, $2r$ oldalú négyzettel. Ennek területe $4r^2$, és azon rácspontok vannak benne, amelyek koordinátái $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[r]$, számuk $(2[r]+1)^2$. A terület és a rácspontok száma különbsége ekkor

$$\Delta^*(r) = (2[r]+1)^2 - 4r^2 = 4r(1-2\{r\}) + (1-2\{r\})^2.$$

Mivel r 0 és 1 között változik, $(1-2\{r\})$ bármi lehet -1 és 1 között, $\Delta^*(r)$ pedig $-(4r-1)$ és $4r+1$ között van, a felső határt néha (r egész értékeinél) felvéve, az alsót csak megközelítve. Ilyen általános gondolatmenettől tehát lényegesen jobb eredményt nem várhatunk.

Annak okát, hogy a négyzetnél ekkora eltérés lehet a terület és a rácspontok száma között, abban vélhetjük fellelni, hogy amikor r áthalad egy egész számon, a rácspontok száma egyszerre $8r$-et ugrik. Szemléletünk azt sugallja, hogy a kör ilyen disznóságot nem csinál. A körvonalra eső rácspontok száma, vagyis azon $(x,\ y)$ egész számpárok száma, amelyekre

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1.2}$$

felírható képlettel, mégpedig az alábbi módon. Ilyen pont persze csak akkor van, ha $r^2=n$ is egész szám. Bontsuk fel n-et prímtényezőkre, különválasztva a 2-t, a $4k+1$ és $4k-1$ alakú prímeket:

$$n = 2^a p_1^{b_1}\dots p_k^{b_k} q_1^{c_1}\dots q_l^{c_l}, \qquad p_i \equiv 1 \pmod 4, \qquad q_j \equiv 3 \pmod 4.$$

E jelölésekkel az (1.2) egyenlet megoldásainak száma, $\varrho(n)=0$, ha a c_j számok között van páratlan, és

$$\varrho(n) = 4(b_1+1)\dots(b_k+1), \tag{1.3}$$

ha az összes c_j páros. Erről a $\varrho(n)$ mennyiségről belátható, hogy nemcsak $r=\sqrt{n}$-nél lesz kisebb, de n akármilyen kicsi pozitív kitevőjű hatványánál is, ha n elég nagy. Ha tehát csak ezen múlna, $\Delta(r)$ lehetne kisebb, mint r^ε akármilyen kicsi pozitív ε-nal.

A valóság kevésbé idilli; be lehet látni, hogy

$$\limsup \frac{|\Delta(r)|}{\sqrt{r}} = \infty. \tag{1.4}$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogyan lehet elemi geometriai eszközökkel (kihasználva, hogy a kör nem szögletes) túllépni (1.1)-en, és belátni, hogy

$$|\Delta(r)| < Cr^{2/3} \tag{1.5}$$

alkalmas C konstanssal.

2. Bizonyítás

A továbbiakhoz bevezetjük az alábbi konvenciót: c, indexszel vagy anélkül, pozitív konstanst jelöl (amelyet kiszámolhatnánk, de nem tesszük); a „van olyan pozitív c, hogy" szavakat tehát elblicceljük.

A rácspontok alábbi tulajdonságai, amelyeket használni fogunk, fellelhetők az Erdős–Surányi könyv 4. fejezetében.[1] *Erdős Pál, Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon könyvtár, Szeged, 1996.

Ha egy egyenesen legalább két rácspont van, akkor már végtelen sok van, és ezek egyenlő távolságban követik egymást (az ilyen egyenes neve *rácsegyenes*). Ha ez a távolság v, akkor az egyenessel párhuzamos rácsegyenesek egymást $\frac{1}{v}$ távolságban követik.

Rácssokszögek azon egyszerű sokszögek, amelyeknek minden csúcsa rácspont. Ezek területe és a bennük lévő rácspontok száma között az alábbi kapcsolat van:

$$T = B + \frac{H}{2} - 1, \tag{2.1}$$

ahol T a terület, B a sokszög belsejében, H pedig a határán lévő rácspontok száma.

A (2.1) képletet írjuk fel a körben lévő legnagyobb rácssokszögre, vagyis a *körben lévő rácspontok konvex burkára.* Tegyük még hozzá, hogy a keresett szám

$$N(r) = B + H,$$

és a kör területe

$$\pi r^2 = T + T',$$

ahol T' a sokszög és a körvonal közti sáv területe. A fentiekből

$$\Delta(r) = \frac{H}{2} + 1 - T';$$

(1.5) bizonyításához tehát elég belátni, hogy

$$H < c_1 r^{2/3} (2.2) s T' < c_2 r^{2/3} . (2.3)$$

A továbbiakban bebizonyítjuk (2.2)-t, és vázoljuk (2.3) bizonyítását. Legyen k a sokszög oldalainak száma. Egy oldalt a rajta levő rácspontok egyenlő szakaszokra osztanak; legyen n_i az i-edik oldalon levő szakaszok száma (tehát $n_i - 1$ belső pont van az oldalon; ha csak a két csúcspont van, akkor $n_i = 1$). A két szomszédos osztópontot összekötő vektor legyen $\vec{v}_i$, ennek hossza v_i; az oldal hossza tehát $n_i v_i$, (*1. ábra*) a sokszög kerülete pedig

$$\sum n_i v_i \le 2\pi r \tag{2.4}$$

(miért is?).

Az oldalegyenes által meghatározott húr hossza legyen l_i, a (kisebbik, a sokszögön kívül eső) körszelet magassága pedig h_i. Az l_i hosszú húrt a rácspontok $n_i + 2$ részre osztják, amelyek közül a középső n_i hossza v_i, a két szélsőé kisebb, így

$$n_i v_i \le l_i < (n_i + 2) v_i \le 3 n_i v_i. \tag{2.5}$$

A továbbiakban az i indexeket általában elhagyjuk.

Eddig nem használtuk ki, hogy nem akármilyen rácssokszög van a körben, hanem a lehető legnagyobb. Ezt pedig így tehetjük meg. Húzzuk meg az oldallal párhuzamos szomszédos rácsegyenest, mégpedig a kör középpontjától távolabbit (*2. ábra*). Ennek távolsága az oldalegyenestől $\frac{1}{v}$. Ha $h > \frac{1}{v}$, akkor ez metszi a kört, és egy olyan körszeletet vág le, amelynek magassága

$$h' = h - \frac{1}{v}.$$

A húr hossza Püthagorasz tételéből számolható:

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r-h)^2 = \left(\frac{l'}{2}\right)^2 + (r-h')^2, \tag{2.6}$$

tehát

$$\frac{l^2 - l'^2}{4} = (r-h')^2 - (r-h)^2 = (h-h')(2r-h-h') = \frac{1}{v}(2r-h-h') < \frac{2r}{v}.$$

Számolás nélkül is észrevehetjük viszont, hogy $l' < v$, hiszen a rácspontok egymást v távolságban követik, és erre a húrra nem jut rácspont. Emiatt

$$l^2 < l'^2 + \frac{8r}{v} < v^2 + \frac{8r}{v}. \tag{2.7}$$

[1] *

Ha $h \leq \frac{1}{v}$, akkor ez az egyenes a kört nem metszi. (2.7) ekkor is igaz, mert

$$l^2 = 4\left(r^2 - (r-h)^2\right) = 4h(2r-h) < 8rh \leq \frac{8r}{v}.$$

Mivel $l \geq nv$, ezért (2.7) azt adja, hogy

$$(n^2-1)v^2 \leq \frac{8r}{v}. \tag{2.8}$$

Innen

$$n^2 \leq \frac{8r}{v^3} + 1. \tag{2.9}$$

Foglalkozzunk először azokkal az oldalakkal, ahol $v < 2r^{1/3}$. Itt (2.9)-ben az első tag a nagyobb, és így $n^2 \leq \frac{16r}{v^3}$, $n \leq \frac{4r^{1/2}}{v^{3/2}}$.
Legyen

$$H_1 = \sum_{v_i < 2r^{1/3}} n_i;$$

ekkor tehát

$$H_1 < 4\sqrt{r} \sum_{v_i < 2r^{1/3}} v_i^{-3/2} \leq 4\sqrt{r} \sum_{v < 2r^{1/3}} v^{-3/2}, \tag{2.10}$$

ahol a második összegzés az összes legfeljebb $2r^{1/3}$ hosszú vektorra kiterjed, nemcsak azokra, amelyek valamelyik oldal irányába mutatnak.

Egy ilyesféle összeget így lehet becsülni. Legyen az összegzés határa a (most tehát $a = 2r^{1/3}$). Nézzük először azokat a vektorokat, amelyek hossza $\frac{a}{2} \leq v < a$. Ezek száma legfeljebb annyi, mint az origótól különböző rácspontok száma az origó körüli a sugarú körben, tehát kisebb, mint $c_3 a^2$ (most a legdurvább becslés is elég nekünk), egy összeadandó pedig kisebb, mint $\left(\frac{a}{2}\right)^{-3/2}$, ez a részösszeg tehát kisebb, mint $c_4\sqrt{a}$. Ezt a becslést a helyett elvégezzük az $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{2^j}$ számokra, amíg csak $\frac{a}{2^j} < 1$ nem lesz, és az eredményt összeadjuk:

$$\sum v^{-3/2} < c_4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{2^i}} = c_5\sqrt{a}.$$

Ezt (2.10)-be helyettesítve

$$H_1 < c_6\sqrt{r}\sqrt{r^{1/3}} = c_6 r^{2/3}.$$

A $v \geq 2r^{1/3}$ esethez tartozó H_2 összeget pedig (2.4)-ből becsülhetjük azonnal:

$$H_2 = \sum_{v_i \geq 2r^{1/3}} n_i \leq \frac{1}{2} r^{-1/3} \sum n_i v_i \leq \pi r^{2/3}.$$

H_1 és H_2 becslését összeadva (2.2)-t beláttuk.

Foglalkozzunk most T' becslésével. Egy körszelet területe

$$t_i < l_i h_i;$$

a körszeletek lefedik (átfedéssel) a sokszög és a körvonal közti sávot, tehát

$$T' < \sum t_i < \sum l_i h_i.$$

h és l között kapcsolat van: Püthagorasz (2.6) alatt felírt tételéből

$$h = \frac{l^2}{4(2r-h)} < \frac{l^2}{4r}.$$

Tehát $t < hl < \frac{r^3}{r}$, és (2.5) miatt $1 < 3nv$, ezért végül

$$t < c_7 \frac{n^3 v^3}{r}. \tag{2.11}$$

Ha $v \leq 2n^{1/3}$, akkor az $n \leq 4r^{1/2}v^{3/2}$ egyenlőtlenség miatt $t < c_9 n$, úgyhogy az ehhez az esethez tartozó területek összege $< c_9 B < c_{10} r^{2/3}$.

A hátralevő eset – azon szeletek területét becsülni – ahol v nagy, komplikáltabb az eddigieknél. Mindenesetre (2.9)-ből látszik, hogy $n = 1$, de t nem lesz általában korlátos. Ha pl. r alig nagyobb egy n egész számnál, $n^2 < r^2 < n^2 + 1$, akkor az $(n,\ 0)$ pontot az $\left(n-1,\ \left[\sqrt{2n-1}\right]\right)$ ponttal egy kb. $\sqrt{2n}$ hosszú oldal köti össze, amely egy $\sqrt{n}$ nagyságrendű szeletet jelent. Ez az oldal „közel függőleges"; be lehet bizonyítani, hogy általában azok a hosszú oldalak, amelyeken csak a két csúcspont van, közel párhuzamosak egy kicsi vektorral. Ezt csak felszínesen vázoljuk, a számítások elvégzése nélkül.

Mivel v nagy ($> 2r^{1/3}$), $l \geq v$ is nagy és $h \approx l^2/r$ nagy $\dfrac{1}{v}$-hez képest. Ekkor a szomszédos rácsegyeneshez tartozó l' húr alig rövidebb l-nél. Mivel pedig rajta a rácspontok $v \leq l$ távolságra vannak, a húr két oldalán levő rácspontok a körvonaltól legfeljebb $l - l'$ távolságra vannak (*3. ábra*). Erről kiszámolható (újra Püthagorasz tételével), hogy kisebb, mint $c\dfrac{r}{v^2}$. A két csúcspontból ehhez a két rácsponthoz vezető $\vec{w}$ vektornak $\vec{v}$ irányú komponense tehát legfeljebb ekkora, a rá merőleges komponens pedig pontosan $\dfrac{1}{v}$, jóval kisebb. Ez a „közel párhuzamos" kicsi vektor (az ábra erősen torzít).

Mivel $v < c\sqrt{\dfrac{r}{w}}$ és $t < c\dfrac{v^3}{r}$, ezért $t < c\dfrac{\sqrt{r}}{w^{3/2}}$. Ez ugyanarra az összegre vezet, amit már egyszer kiszámítottunk; a baj csak az, hogy egy $\vec{w}$ vektor többször is előfordulhat. Némi fejtöréssel bizonyítható, hogy nemcsak egy körszelet területe becsülhető $\dfrac{\sqrt{r}}{w^{3/2}}$-nel, hanem az adott $\vec{w}$-hez tartozó összes körszeletek területeinek összege is.

3. Megjegyzések

1. Az (1.3) képlet bizonyítása megtalálható pl. a Turán–Gyarmati jegyzetben[2] *Gyarmati Edit:* Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó (ELTE-jegyzet). Ez a képlet mutatja, hogy $\varrho(n) \leq 4\tau(n)$, ahol τ az osztók száma. $\tau(n) < n^{\varepsilon}$ nagy n-re.[3]l. *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996. 8. fejezet X. tétel.

2. (1.4)-nél több is igaz, éspedig

$$\limsup \frac{\Delta(r)}{\sqrt{r}} = \infty, \qquad \liminf \frac{\Delta(r)}{\sqrt{r}} = -\infty.$$

Az első eredmény G. H. Hardytól származik 1915-ből, a második A. E. Inghamtől 1940-ből. Azóta mindkét tételt némileg erősítették, mégpedig a nevezőbe betettek egy-egy végtelenhez tartó függvényt ($\log r$ hatványát).

3. A kiinduló r-es becslés Gausstól származik; az $r^{2/3}$-os javítás Sierpińskitől 1906-ból. W. Sierpiński bizonyítása hosszú; többen készítettek egyszerű bizonyítást, rendszerint többé-kevésbé analitikus módon.

Az $r^{2/3}$-os becslés javításával sokan küszködtek, egy-egy hajszálnyit csökkentve a kitevőn. A rekord $\dfrac{46}{73} \approx 0,630137$. Általában azt sejtik, hogy az igazság $\dfrac{1}{2}$, vagyis $\dfrac{|\Delta(r)|}{r^t}$ bármely $t > \dfrac{1}{2}$ kitevőre korlátos. Ez irányban ismert, hogy $\Delta(r)$ „rendszerint" nem nagyobb, mint $\sqrt{r}$ abban az értelemben, hogy

$$\int_0^R \Delta(r)^2 < cR^2$$

Ez az eredmény E. G. H. Landautól származik.

Az itt leírt bizonyításnak $r^{2/3}$ a természetes határa. $\dfrac{\Delta(r)}{r^{2/3}} \to 0$ bizonyítása elképzelhető volna úgy, hogy belátjuk, hogy $\dfrac{H}{r^{2/3}} \to 0$ és $\dfrac{T'}{r^{2/3}} \to 0$; ezek viszont nem igazak, sőt az sem, hogy

$$\frac{H}{r^{2/3}} \to a, \qquad \frac{T'}{r^{2/3}} \to \frac{a}{2}$$

valamely a konstanssal. H és T' között tehát nemtriviális kapcsolat van, amelynek jellegéről nem tudunk semmit.

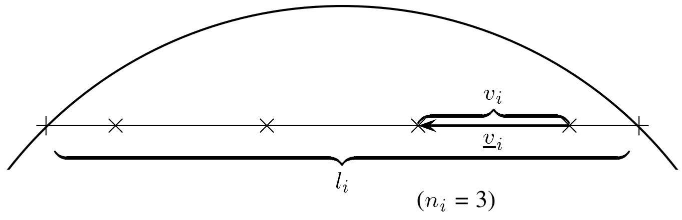
4. Lehetséges, hogy Q nagy pozitív és negatív kilengései máshogy viselkednek. Mindenesetre a pozitív és negatív becslések bizonyítása gyakran másmilyen és nem is ugyanolyan erősek. A mi bizonyításunkban is, amikor beláttuk (2.2)-t, ezzel már megkaptuk, hogy $\Delta(r) < cr^{2/3}$, míg az alsó becslés további kínlódással jár.

Ruzsa Z. Imre

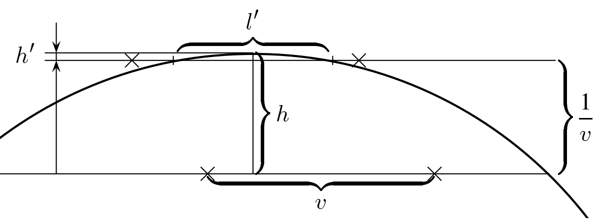
---

[2] **

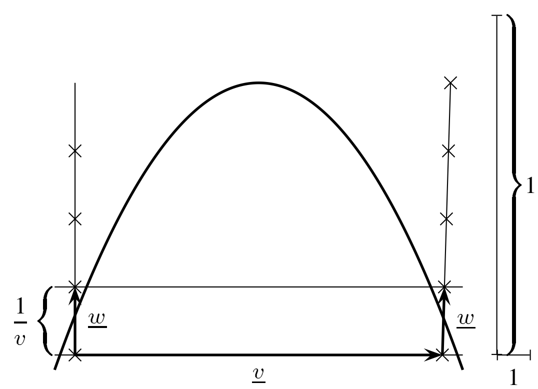
[3] ***



v_i
$\underline{v}_i$
l_i
$(n_i = 3)$



l'
h'
h
$\frac{1}{v}$
v



1
$\frac{1}{v}$
$\underline{w}$
$\underline{w}$
$\underline{v}$
1