1. Az egyenlet gyökei akkor valósak, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz ha

$$4(m+1)^2 - 4\cdot 2(m^2+2m) \geq 0,$$

ami akkor teljesül, ha

$$-1-\sqrt{2} \leq m \leq -1+\sqrt{2}.$$

Mivel $x_1+x_2 = -(m+1)$ és $4x_1x_2 = 4\cdot\dfrac{m^2+2m}{2} = 2m^2+4m$, azért

$$f(m) = 2m^2+3m-1.$$

$f(m)$ legkisebb értéke a $[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$ intervallumon $-\dfrac{17}{8}$, amit az $m=-\dfrac{3}{4}$ helyen vesz fel, míg legnagyobb értéke $2\left(\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}\right)^2-\dfrac{17}{8}$, amit az $m=-1-\sqrt{2}$ helyen vesz fel.

2. a) Ismeretes, hogy minden háromszögben $\varrho=\dfrac{T}{s}$ és $r=\dfrac{abc}{4T}$, így $\varrho r=\dfrac{abc}{4s}$.

b) A háromszög egyik oldala 2 egység, a másik két oldal összege 4 egység. Célszerű jelöléssel a két oldal $2-x$, illetve $2+x$, ahol $0\leq x<1$. A szóban forgó körök területének szorzata

$$f(x)=\varrho^2\pi\cdot r^2\pi=\pi^2(\varrho r)^2=\pi^2\cdot\left(\frac{2\cdot(2-x)(2+x)}{4\cdot 3}\right)^2,$$

hiszen $2s=6$, $s=3$.

Az $f(x)=\dfrac{\pi^2}{36}(4-x^2)^2$ függvény a $[0,\ 1)$ intervallumban akkor a legnagyobb, ha $x=0$, hiszen $4-x^2>0$, és így a négyzete akkor a legnagyobb, ha $4-x^2$ a legnagyobb.

Az $f(x)$ legnagyobb értéke $\dfrac{4}{9}\pi^2$, ami akkor adódik, ha a háromszög egyenlő oldalú.

3. Ha van ilyen k, azaz $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$ és $c_1=kc_2$, akkor

$$f(x)=\frac{k(a_2x^2+b_2x+c_2)}{a_2x^2+b_2x+c_2}=k,\qquad \text{tehát } f(x) \text{ értéke állandó.}$$

Ha $f(x)$ értéke állandó minden megengedett x-re, azaz

$$f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}=K,$$

akkor

(1) $$(a_1-Ka_2)x^2+(b_1-Kb_2)x+(c_1-Kc_2)=0,$$

azaz az (1) *legfeljebb* másodfokú egyenletnek kettőnél több megoldása van, ami csak úgy lehetséges, hogy minden együttható nulla (a polinom azonosan nulla), tehát $a_1-Ka_2=0$, $b_1-Kb_2=0$, $c_1-Kc_2=0$, így valóban van olyan $K\in\mathbf{R}$, hogy $a_1=Ka_2$, $b_1=Kb_2$ és $c_1=Kc_2$.

4. A rekurzív definícióból következik, hogy

$$a_n-a_{n-1}=2a_{n-2}-2a_{n-1}=(-2)(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

A $b_k=a_{k+1}-a_k$, $k=1,2,\ldots,n,\ldots$ különbségsorozat a $q=-2$ hányadosú mértani sorozat, $b_1=a_2-a_1=1$, ezért $b_k=(-2)^{k-1}$. Így

$$a_2-a_1=1, a_3-a_2=-2, a_4-a_3=4, \vdots a_n-a_{n-1}=(-2)^{n-2}.$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$a_n-a_1=\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)},$$

ahonnan $a_n=1+\dfrac{1}{3}(1-(-2)^{n-1})=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}(-2)^{n-1}$.

$$S_n=\frac{4}{3}n-\frac{1}{3}(1-2+\cdots+(-2)^{n-1})=\frac{4}{3}n-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\frac{4}{3}n-\frac{1}{9}(1-(-2)^n).$$

Rábai Imre