

¹Ezt a feladatsort szakköri feldolgozásra ajánljuk.

Pogány János, a budapesti Piarista gimnázium kiváló matematika tanára emlékére.

1. Állapítsa meg, hogy az m valós paraméter mely értékeire lesznek a

$$2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$$

egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre az

$$f(m) = x_1 + x_2 + 4x_1x_2$$

kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az adott egyenlet megoldásai.

2. a) Igazolja, hogy minden háromszögben

$$\varrho \cdot r = \frac{abc}{4s},$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai, $a + b + c = 2s$, ϱ a háromszögbe, r a háromszög köré írt kör sugara.

b) Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyekben az egyik oldal hossza 2 egység, a másik két oldal összege 4 egység. Határozza meg a háromszögbe és a háromszög köré írható körök területei szorzatának a legnagyobb értékét.

3. Igazolja, hogy az

$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \quad (a_1 \neq 0, a_2 \neq 0; a_2x^2 + b_2x + c_2 \neq 0)$$

kifejezés értéke pontosan akkor (akkor és csak akkor) állandó (azaz értéke független x -től), ha van olyan $k \in \mathbf{R}$, hogy $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$.

4. Az (a_n) ($n \in \mathbf{N}^+$) sorozatban $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és $n \geq 3$ esetén $a_n = 2a_{n-2} - a_{n-1}$.

Írja fel a_n -et, majd S_n -et ($S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$) n függvényeként.

Rábai Imre