

¹*Helyesbítés.* Októberi számunkban a mérőlap ajánlásában szereplő szegedi Radnóti Miklós Gimnázium korábban Klauzál Gábor nevét viselte. A 6. feladatban C helyett X -et írtunk.

1. A bal, illetve a jobb oldalon álló két-két törtkifejezés összeadása után a

$$\frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 24}{x^2 - 9} - \frac{28}{15}$$

egyenletet kapjuk. Rendezés után $7x^4 - 55x^2 + 108 = 0$, ahonnan $x^2 = 4$ vagy $x^2 = \frac{27}{7}$. Az egyenletnek négy megoldása

$$\text{van: } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3\sqrt{\frac{3}{7}}, x_4 = -3\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

2. Az ismert $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$, $c = 2r \sin \gamma$ összefüggések alkalmazásával, ahol r a háromszög köré írható kör sugara,

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha &= \frac{b^2}{4r^2} + \frac{c^2}{4r^2} - 2 \cdot \frac{b}{2r} \cdot \frac{c}{2r} \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{4r^2}(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) = \frac{a^2}{4r^2} = \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

3. Mivel $-x^2 + x - 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ minden valós x -re negatív, ezért a két egyenlőtlenséggel ekvivalens:

$$-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2,$$

tehát a

$$4x^2 + (a - 3)x + 1 > 0$$

és az

$$x^2 - (a + 2)x + 4 > 0$$

minden valós x -re. Ezért mindkét másodfokú kifejezésnek negatív lesz a diszkriminánsa.

$$(a - 3)^2 - 16 < 0, \quad \text{és az} \quad (a + 2)^2 - 16 < 0, \quad -4 < a - 3 < 4 \text{ és } -4 < a + 2 < 4, \quad -1 < a < 7 \text{ és } -6 < a < 2.$$

Az egyenlőtlenség $-1 < a < 2$ esetén teljesül minden valós x -re.

4. Az $APDB$ húrnégyszög köré írt kör két szelője CA , illetve CB .

A szelőtétel szerint $CP \cdot CA = CD \cdot CB$. Mivel $CA^2 = 2, 4^2 + 4, 5^2 = 5, 1^2$, ezért $CA = 5, 1$. Legyen $AP = y$. Most $5, 1 \cdot (5, 1 - y) = 2, 4 \cdot 4, 8$, ahonnan $y = 5, 1 - \frac{2, 4 - 4, 8}{5, 1}$, $y = AP \approx 2, 84$ egység.

A feladat hasonlóság, területszámítás és trigonometria alkalmazásával is megoldható.

5. Mivel (a szokásos jelölésekkel)

$$\begin{aligned} (n + k)(S_n - S_k) &= (n + k) \cdot \frac{n}{2} \left((2a_1 + (n - 1)d) - \frac{k}{2}(2a_1 + (k - 1)d) \right) = \\ &= \frac{n + k}{2} \cdot (n - k)(2a_1 + (n + k - 1)d), \end{aligned}$$

és $(n - k)S_{n+k} = (n - k) \cdot \frac{n + k}{2} \cdot (2a_1 + (n + k - 1)d)$, ezért igaz az állítás.

6. Mivel $AB^2 = 16 + 25 = 41$, $AB = \sqrt{41}$, ezért a C ponthoz tartozó m magasság (a C pont távolsága az AB egyenestől) $m = \frac{18}{\sqrt{41}}$, hiszen $9 = \frac{\sqrt{41} \cdot m}{2}$.

Az AB egyenes egyenlete: $5x - 4y + 20 = 0$. A $C(x; 7)$ pont távolsága ettől az egyenestől $\frac{18}{\sqrt{41}}$ egység, tehát $\frac{|5x - 4 \cdot 7 + 20|}{\sqrt{41}} = \frac{18}{\sqrt{41}}$, azaz

$$5x - 8 = 18,$$

vagy

$$5x - 8 = -18$$

$$x_1 = \frac{26}{5}$$

vagy

$$x_2 = -2.$$

$$C_1 \left(\frac{26}{5}; 7 \right),$$

$$C_2(-2; 7).$$

7. Mivel az x^2 együtthatója pozitív, ezért $x_1 < a < x_2$ pontosan akkor teljesül, ha a másodfokú kifejezés az $x = a$ helyen negatív, azaz

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2(2a + 1) \cdot a + a(a - 1) &< 0, \\ -a^2 - 3a &< 0. \end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha $a < -3$ vagy $a > 0$. Ezekre az a értékekre az eredeti egyenlet diszkriminánsa pozitív, tehát létezik két (valós) gyöke.

8. a) Az egyenletnek pontosan akkor van két egyenlő valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$D = 4(1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha) - 4(1 + 2 \cos \alpha).$$

$D = 0$, ha $\cos \alpha \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha) = 0$, azaz ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vagy $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(Az egyenlet ekkor: $(x - 1)^2 = 0$, $(x + 1)^2 = 0$, $(x - \sqrt{2})^2 = 0$, $(x + \sqrt{2})^2 = 0$.)

b) Az egyenletnek két különböző valós gyöke akkor van, ha a diszkriminánsa pozitív.

Mivel $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$, azért

$$\cos \alpha \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) > 0$$

kell teljesülnön. Ez akkor teljesül, ha $\cos \alpha > 0$ és $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) > 0$ vagy $\cos \alpha < 0$ és $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) < 0$, tehát

$$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ és } 2k\pi < \alpha - \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi \quad (k, n \in \mathbf{Z})$$

vagy $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ és $\pi + 2k\pi < \alpha - \frac{\pi}{4} < 2\pi + 2k\pi$, $(n, k \in \mathbf{Z})$,

azaz $\frac{\pi}{4} + 2m\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} + 2m\pi$ vagy $\frac{5\pi}{4} + 2l\pi < \alpha < \frac{3\pi}{6} + 2l\pi$ esetén $(m, l \in \mathbf{Z})$.

Rábai Imre