I. kategória: SzakközépiskolákElső (iskolai) forduló

1. Az $ABCD$ négyzet belsejében úgy jelöljük ki a P pontot, hogy a $PAB\sphericalangle = PBA\sphericalangle = 15^\circ$ legyen. Igazolja, hogy ekkor a PCD háromszög szabályos háromszög.

2. Oldja meg a természetes számok halmazán az $y^2 + 48 = x^2 y$ egyenletet.

3. Az $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ egész számokból álló sorozatot a következőképpen definiáljuk:
d) $a_1 = 1$,
e) minden $n \in \mathbf{Z}^+$-ra $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n + 1$,
f) $a_2 > a_1$.
Számítsa ki a sorozat első 1997 elemének az összegét, azaz az $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{1996}$ összeget.

4. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának felezőpontját jelölje F_1. Az AC és a BC oldalak fölé, kifelé megrajzoljuk az ACB_1 és a BCA_1 egyenlő szárú derékszögű háromszögeket (a derékszög B_1-ben, illetve A_1-ben van). Bizonyítsa be, hogy az $F_1A_1B_1$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

5. Oldja meg a $0 \le x \le 2\pi$ intervallumon a $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ egyenlőtlenséget.

6. Legyenek x és y pozitív valós számok. Milyen kapcsolat áll fenn x és y között, ha az

$$\frac{x^{16}}{y^{16}} + \frac{y^{16}}{x^{16}} - \frac{x^8}{y^8} - \frac{y^8}{y^8} + \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

kifejezés a legkisebb értékét veszi fel? Határozza meg ezt a legkisebb értéket.

Második forduló

1. Az $\{a_n\}: \ a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots$ számtani sorozat különbsége 3. A $\{b_n\}$ számtani sorozat első eleme 2-vel kisebb a_1-nél, a különbsége 4, és minden eleme pozitív. Határozza meg, hogy a két sorozatnak legfeljebb hány közös eleme lehet az 1997-nél kisebb számok között?

2. Igazolja, hogy minden n egész számra az

$$\frac{n^5}{120} + \frac{n^3}{8} + \frac{n^2}{2} + \frac{11n}{30}$$

kifejezés egész szám.

3. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek gyökei az

$$x + y + (z^2 - 8z + 14)\sqrt{x + y - 2} = 1, 2x + 5y + \sqrt{xy + z} = 3$$

egyenletrendszernek.

4. Egy téglalap szomszédos oldalai a cm és b cm hosszúak, ahol a és b 1-nél nagyobb egész számok. A téglalap területe T cm^2, és T osztható 6-tal. A P sokszöget úgy származtatjuk, hogy a 2 cm oldalú négyzet egyik csúcsánál levágunk egy 1 cm oldalú négyzetet úgy, ahogyan az ábrán látható. Igazolja, hogy a fenti tulajdonságú téglalapok egyrétűen és hézagmentesen lefedhetők a P-vel egybevágó sokszögekkel.

5. A nem egyenlő szárú ABC háromszögbe írt kör középpontját jelöljük K-val. Az AB és az AC oldalegyeneseket és az a hosszúságú BC oldalt kívülről érintő kör középpontját jelöljük K_a-val. Bizonyítsa be, hogy ha $AK = \dfrac{1}{2}AK_a$, akkor $a^2 > \dfrac{8T}{9}$, ahol T az ABC háromszög területének mérőszáma.

Harmadik (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-hez található olyan $2n+1$ darab közvetlenül egymás után álló természetes szám, hogy ezek közül az első $n+1$ darab négyzetének az összege egyenlő az ezek közül való utolsó n darab négyzetének az összegével.

2. Az ABC háromszög AB oldalán úgy helyezkednek el a C_1 és C_2 pontok, a BC oldalán az A_1 és A_2 pontok, végül a CA oldalán a B_1 és B_2 pontok, hogy

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = k \quad \text{és} \quad \frac{AC_2}{C_2B} = \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{CB_2}{B_2A} = m$$

egyszerre teljesül, ahol k és m különböző pozitív egész számok.

Legyen az $A_1B_1C_1$ háromszög területe t_1, az $A_2B_2C_2$ háromszög területe t_2, végül az ABC háromszög területe t. Lehetséges-e, hogy a t_1, t_2 és t számok ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymás után következő, szomszédos tagjai?

3. Bizonyítsa be, hogy az a, b, c oldalú háromszögben az a és b oldalakkal szemben fekvő α és β szögekre akkor és csak akkor teljesül az $\alpha = 3\beta$ egyenlőség, ha

$$c = (a-b)\sqrt{1+\frac{a}{b}}.$$

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumokElső (iskolai) forduló

1. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyeit fordított sorrendben is felírjuk, és az így kapott számot hozzáadjuk az eredetihez.

a) Kaphatunk-e így csupa 9-esből álló 1997 jegyű számot?

b) Kaphatunk-e így csupa 9-esből álló 1998 jegyű számot?

2. Egy derékszögű háromszög befogóira mint átmérőkre kifelé félköröket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy annak a négyzetnek a területe, amelynek oldala a két félkör közös érintőszakasza, a derékszögű háromszög területével egyenlő. (A közös érintőszakasz: a két félkör közös érintőjén az érintési pontokat összekötő szakasz.)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha p 3-nál nagyobb prímszám, akkor bármely p darab egymást követő egész szám négyzetének az összege osztható p-vel.

4. 32 település között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsuk be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településről bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával.

5. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pozitív tagú sorozatban a_1 és a_2 relatív prím egészek, és $1 < a_1 < a_2$. Ha $n \geq 1$, a sorozat tagjait az

$$a_n^2 \cdot a_{n+2} = a_{n+1}^3$$

képlettel adjuk meg. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak nincs olyan tagja, amely másik két tagjának az összegével egyenlő.

Második forduló

1. Egy 3×3-as táblázat minden mezőjére ráírunk egy egész számot úgy, hogy a beírt számok között legyen páros is és páratlan is. Ezután a táblázatból egy újabb (második) táblázatot készítünk a következő módon: az eredeti táblázat egy M mezőjével szomszédos mezőkre írt számokat összeadjuk, és ezt a számot írjuk az új táblázatba az M-nek megfelelő helyre, és ezt mind a kilenc mezőre elvégezzük. Kérdéseink: ennek az eljárásnak megismétlésével egy tetszőleges táblázatból kiindulva eljuthatunk-e olyan táblázathoz, amelyben

a) minden mezőn páratlan szám áll;

b) minden mezőn páros szám áll?

(Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.)

Egy példa az új táblázat szerkesztésére:

3	−1	0			8	10	1
9	7	2	$\Rightarrow$		11	13	13
1	3	6			12	14	5

2. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre a C_1, A_1, B_1 pontokban érinti. Az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének a felezőpontja legyen C_2, az A-t nem tartalmazó BC ív felezőpontja A_2, a B-t nem tartalmazó ív felezőpontja pedig B_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x + y + (z^2 - 8z + 14)\sqrt{x + y - 2} = 1, 2x + 5y + \sqrt{xy + z} = 3.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy az

$$a_n = 5\frac{10^n - 1}{9} + 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

sorozat nem tartalmaz négyzetszámot.

Harmadik (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy a

$$2\sin 2^\circ,\ 4\sin 4^\circ,\ 6\sin 6^\circ,\ \ldots,\ 2k\sin(2k)^\circ,\ \ldots,\ 180\sin 180^\circ$$

számok számtani közepe $\operatorname{ctg} 1^\circ$-kal egyenlő.

2. Legyen P, Q, R rendre az ABC háromszög AB, BC, CA oldalának, A', B', C' pedig rendre a PQR háromszög PR, QP, RQ oldalának egy-egy olyan pontja, amelyekre teljesül, hogy az AB és $A'B'$, BC és $B'C'$, CA és $C'A'$ szakaszok páronként párhuzamosak egymással. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és $A'B'C$ háromszögek párhuzamos oldalainak az aránya egyenlő a PQR és az $A'B'C'$ háromszögek területeinek arányával.

3. x, y és n olyan pozitív egészek, amelyekre teljesül, hogy $x \leq y$, legnagyobb közös osztójuk; $(x, y) = 1998$ és legkisebb közös többszörösük: $[x, y] = n!$.
a) n milyen értéke esetén létezik a fenti feltételeket kielégítő x, y számpár?
b) n milyen értéke esetén lesz ezeknek a számpároknak a száma 1998-nál kisebb?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első forduló

1. Lássuk be, hogy 99 szomszédos egész szám négyzetének az összege nem lehet teljes hatvány (azaz egy egész szám egynél nagyobb, egész kitevőjű hatványa).

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben a C csúcsnál lévő szög γ. Legyen P az AB szakasz belső pontja. Vegyük fel az AC félegyenesen (azaz az AC oldalon vagy annak a C csúcson túli meghosszabbításán) a B_1, a BC félegyenesen pedig az A_1 pontot úgy, hogy a B_1PA szög is és az A_1PB szög is γ legyen. Legyen továbbá k_1 az APB_1 háromszög, k_2 pedig a BPA_1 háromszög körülírt köre, és jelölje M a k_1 és k_2 körök P-től különböző metszéspontját. Milyen ponthalmazt alkotnak az M pontok, ha P végigfut az AB szakasz belső pontjain?

3. Egy középpontosan szimmetrikus konvex hatszögben minden második oldalszakaszon vegyünk fel egy-egy pontot. Mutassuk meg, hogy az ezek által alkotott háromszög területe legfeljebb a hatszög területének a fele.

4. Egy-egy cédulára felírtuk az 1, 2, 3, illetve 4 számokat. Anna kihúz egy cédulát a négy közül, majd visszateszi a többi közé. Ezután Zsófi húz ki egy cédulát, utána visszateszi, majd ismét Anna következik. A kihúzott számot mindig hozzáadják az addig kihúzott számok összegéhez. Az nyer, akinek a húzása után először lesz az összeg 3-mal osztható. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna nyer?

5. a) Létezik-e olyan 1998-adfokú egész együtthatós $f(x)$ polinom, hogy végtelen sok valós x-re $f(x) = f(1 - x)$ teljesül?

b) Ugyanez a kérdés az $f(x) = f(x-1)$ feltétel mellett.

Második (döntő) forduló

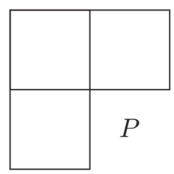
1. Legyenek $a_1, \ldots, a_r$ az $1, 2, \ldots, 1998$ számok közül az 1998-hoz relatív prímek. Milyen k egészekre teljesül, hogy a ka_i számok mind különböző maradékot adnak 1998-cal osztva?

2. Egy városban néhány egyforma létszámú független klub működik. Ez azt jelenti, hogy van egy p arány, amelyre igazak a következők:

(i)Minden klub létszáma a város létszámának p-szerese.

(ii)Bárhogy veszünk ki $r+1$ különböző klubot, $Q_1, \ldots, Q_r$ és Q-t (r is tetszőleges), a $Q_1, \ldots, Q_r$ klubok közös tagjainak pontosan a p-szerese tagja a Q klubnak is.
Tudjuk még, hogy az idei évhez képest tavaly 1-gyel, tavalyelőtt pedig 2-vel kevesebb (de még mindig legalább egy) klub működött a városban. Ennek megfelelően – miközben a fenti feltételrendszer, a p arány és a város lélekszáma nem változott – tavaly 2916-tal, tavalyelőtt pedig 6156-tal kevesebb városlakó volt klubtag (azaz legalább egy klubnak a tagja), mint az idén. Mindez egy másik, nagyobb lélekszámú városról is elmondható. Mennyivel laknak többen a második városban?

3. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög AB oldalán a P és Q pontok úgy helyezkednek el, hogy az APC és QBC háromszögek beírt köre egyenlő sugarú. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AQC és PBC háromszögek beírt köre is egyenlő sugarú.



3	–1	0
9	7	2
1	3	6

$\Rightarrow$

8	10	1
11	13	13
12	14	5