Tanulóverseny feladatai

KEZDŐK

Első forduló1mm

1. Egy farmon több ló van, mint kacsa. A tehenek száma harmada a lovak és kacsák együttes számának. A kacsák és lovak fejei és lábai számának összege 100. Hány tehén van a farmon?

2. Bizonyítsa be, ha egy derékszögű trapéz szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor a merőleges szár: $\dfrac{2ac}{a+c}$, ahol az a és c a trapéz alapjai.

3. Egy 665 oldalú szabályos sokszög oldala 3 cm. Nagyítsuk ezt a sokszöget a középpontjából úgy, hogy a nagyított és az eredeti oldalak távolsága 1 cm legyen! Bizonyítsa be, hogy a két sokszög területének különbsége több mint 1998 cm^2.

4. Ábrázolja közös koordinátarendszerben a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) := \big||x+4| - |x-4|\big| \quad \text{és} \quad g(x) = \big||x| - 2\big|$$

helyettesítési értékű függvények grafikonját, és határozza meg azon sokszöget területének összegét, amelyeknek minden oldala hozzátartozik valamelyik függvény grafikonjához.

5. Milyen tulajdonságú k, m, n, l természetes szám esetén lesz az

$$1^k + 9^m + 9^n + 7^l$$

összeg utolsó számjegye 4?

Második forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Egy ABC háromszög BC oldalához hozzáírt kör középpontján át húzzunk párhuzamost a BC oldallal. Metssze ez a párhuzamos az AB oldalegyenest a D, az AC oldalegyenest az E pontban. Bizonyítsa be, hogy $DB + CE = DE$.

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paramétert jelent: $|x+3| + p\cdot|x-2| = 5$. A p értékétől függően hány megoldása van az egyenletnek?

3. 1998 darab egész szám közül 1997 darab szám négyzetének az összege egyenlő a kimaradó 1998-adik szám négyzetével. Bizonyítsa be, hogy nem lehet mind az 1998 darab szám páratlan.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Megegyezhet-e 1998 darab páratlan egész szám egyikének a négyzete a többi 1997 darab szám négyzetének az összegével?

2. Bizonyítsa be, hogy egy derékszögű háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságnak a hányadosa $0,4$ és $0,5$ között van.

3. Bizonyítsa be, hogy nincs olyan minden valós számra értelmezett f függvény, amelyre $f(x^2+x+2)+f(x^2-x+2) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ teljesül minden valós x értékre.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Mekkora lehet egy derékszögű háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságának a hányadosa?

2. Az a, b, c, n, M, N pozitív számokról a következőket tudjuk: $b = a + c$, $n \geq 3$, N (a tízes számrendszerben) n jegyű, N első jegye a, utolsó jegye c, a többi $n-2$ jegye b; N jegyeit fordított sorrendben leírva M-et kapjuk, továbbá $M - nN$ olyan $n-1$ jegyű pozitív egész szám, amelynek minden jegye b. Mi lehet az N?

3. Adjon meg olyan minden valós számra értelmezett f és g, legalább másodfokú polinom függvényeket, amelyekhez nem létezik olyan $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, hogy

$$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))$$

minden valós x-re teljesüljön.

HALADÓK
Első forduló

I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Mutassuk meg, hogy ha egy téglalap oldalainak hossza a és $a+1$, akkor a téglalap szögfelezői által határolt síkidom területe független az a értékétől.

2. Mely pozitív egész n számokra osztható $n^8 - n^2$ 504-gyel?

3. Egy derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi. A másik befogóhoz és az átfogóhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Mekkorák a háromszög oldalai?

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán a

$$\frac{z-1}{x} + \frac{z+1}{y} = 1, \qquad \frac{z+1}{x} - \frac{z-1}{y} = 1$$

egyenletrendszert.

5. Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az $1;\ 1;\ -1$ hármast a $-1;\ -1;\ 1$ hármasra cserélhetjük.)
a) Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?
b) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?

2. Egy paralelogramma kerülete K, az oldalak felezőpontja által meghatározott négyszög kerülete pedig k. Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma egyik szöge $60°$-os, akkor

$$\frac{k}{K} \geq \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

3. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x,\ y,\ z)$ számhármas van, amely kielégíti a $2^x + 2^y + 2^z < 2^k$ egyenlőtlenséget, ahol k egy 2-nél nagyobb pozitív egész szám?

4. Adott a síkban az AB szakasz. Mi azoknak a C pontoknak a halmaza a síkban, amelyekre az ABC háromszög A-hoz tartozó súlyvonala és B-hez tartozó magasság-vonala egyenlő hosszú?

Második forduló

I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Egy adott AB szakasz X belső pontjára teljesül, hogy az AB szakaszra rajzolt AX oldalú szabályos háromszög és az XB oldalú szabályos hatszög területének összege minimális. Hol helyezkedik el ekkor az AB szakaszon az X pont?

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?

3. Tekintsük a csupa 1-es vagy 2-es számjegyet tartalmazó n-jegyű számokat ($n \geq 1$). E számok közül (adott n érték esetén) A_n-nel jelöljük azoknak a számát, amelyek azonos számú 1-es és 2-es számjegyből állnak, B_n pedig legyen azon számok száma, amelyek több 1-est tartalmaznak, mint 2-est. Van-e olyan érték, amelyre $A_n = B_n$?

4. Legyen egy tetszőleges ABC háromszög AB, illetve AC oldalának felezőpontja D, illetve E pont. A DE szakasz F felezőpontján átmenő BF egyenes az AC oldalt a G pontban metszi. Mekkora a $BCEF$ és a $FGAD$ négyszög, illetve a BFD és az FEG háromszögek területének aránya?

Harmadik (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Melyek azok az egész számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyekre teljesül az $x^2 + y^2 + xy = x - y$ egyenlőség?

2. Egy $2r$ és egy r sugarú kör kívülről érinti egymást. Tekintsük azokat a köröket, amelyek mindkét kört érintik, és középpontjuk a két adott kör egyik közös külső érintőjén van. Mekkora ezek sugarának aránya?

3. Mely k-re lehet egy $k \times k \times k$-as kockát $1 \times 1 \times 1$-es fekete és fehér kis kockákból úgy összeállítani, hogy bármelyik kis kocka mellett pontosan két vele megegyező színű, lapban szomszédos kis kocka legyen?

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Ismeretes, hogy az $ax + by = c$ egyenletet kielégítő bármely valós $(x; y)$ számpárra teljesül az $x^2 + y^2 > 1$ egyenlőtlenség, ahol az a, b és c paraméter egy háromszög három oldalának hossza.

(I)Mutassuk meg, hogy az a, b, c oldalú háromszög tompaszögű.

(II)Igazoljuk, hogy $|x| + |y|$ minimuma legfeljebb $\dfrac{c}{\sqrt{ab}}$.

2. Az x és y pozitív egészek mely értékeire lesz a $4^x + 4^{x+1} + 4^y$ kifejezés értéke négyzetszám?

3. A következő négy szabály szerint kell köröket elhelyezni a síkon:
(I) semelyik három kör se érintse egymást ugyanabban a pontban;
(II) mindegyik kör pontosan négy másikat érintsen;
(III) a lehető legkevesebb kör legyen;
(IV) a lehető legkevesebb különböző sugár legyen.
Hány körből áll egy – a fenti szabályoknak megfelelő – körelrendezés?
Számítsuk is ki egy ilyen körelrendezésben a körök sugarait.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Az x, y és z pozitív egészek mely értékeire lesz a $4^x + 4^y + 4^z$ kifejezés értéke négyzetszám?

2. Egy tetraéder csúcsainál összeadjuk a csúcsból kiinduló élek egymással bezárt szögeit. Bizonyítsuk be, hogy ha a négy csúcsnál kapott összeg mind egyenlő egymással, akkor a tetraéder lapjainak körülírt körei egyenlő sugarúak.

3. Ketten a következő játékot játsszák. Egy 100 kavicsot tartalmazó halomból felváltva vesznek el, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Korlátozva van azonban az, hogy hány kavicsot lehet elvenni. A Kezdőnek egy kavicsot kell elvennie, utána a Második elvehet egyet vagy kettőt, ezután újra a Kezdő jön, és egy, két vagy három kavicsot vehet el. Általáan az n-edik lépésben az éppen sorra következő játékos legalább egy, de legfeljebb n kavicsot vehet el.

Kinek van nyerő stratégiája?

Mi a helyzet akkor, ha 1998 kaviccsal játszanak?