Egy szokatlan leképezés

A középiskolában általában olyan geometriai transzformációkkal találkozunk, amelyek pontokhoz pontokat rendelnek. Vannak azonban ezektől különböző leképezések is. Most ezek közül vizsgáljuk meg az egyik legegyszerűbbet.

Vegyünk fel a síkon egy derékszögű koordinátarendszert. Egy, az origón át nem menő tetszőleges e egyenes egyenlete egyértelműen felírható $aX + bY = 1$ alakban, ahol a és b egyszerre nem 0. Tekintsük azt a

$$P:\ (a,b) \quad \longleftrightarrow \quad p:\ aX + bY = 1$$

megfeleltetést, amely az origótól különböző pontokat és az origón át nem menő egyeneseket rendeli egymáshoz. Ez a megfeleltetés nyilván kölcsönösen egyértelmű. Nevezzük p-t a P pont *polárisának*, P-t pedig a p egyenes *pólusának*.

Vizsgáljuk meg e leképezés legfontosabb tulajdonságait.

1. *Ha a P pont polárisa a p egyenes, akkor p pólusa P.*
Ez nyilvánvaló, hiszen a definíció szerint az $(a;b)$ koordinátájú pont polárisa az $aX + bY = 1$ egyenletű egyenes, ennek az egyenesnek a pólusa pedig az $(a;b)$ pont. ■

2. *Az R pont r polárisa pontosan akkor megy át az S ponton, ha az S polárisa, s átmegy az R ponton.*
Legyenek R, illetve S koordinátái $(r;q)$ és $(s;t)$. Ekkor r, illetve s egyenlete $rX + qY = 1$ és $sX + tY = 1$. Az R és s illeszkedésének a feltétele

$$sr + tq = 1$$

ami egyúttal S és r illeszkedésének is feltétele. ■

3. *Egy pont pontosan akkor illeszkedik a polárisára, ha rajta van az*

$$X^2 + Y^2 = 1$$

egyenletű körön. Ekkor a pont polárisa éppen a kör adott pontbeli érintője (1. ábra).
A $P(a;b)$ pont pontosan akkor illeszkedik az $aX + bY = 1$ egyenletű polárisára, ha $a^2 + b^2 = 1$, azaz ha a pont rajta van a körön. A kör egy tetszőleges $(s;t)$ pontjában az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért az érintő normálvektora éppen $\mathbf{n}(s;t)$, azaz az érintő egyenlete $sX + tY = s \cdot s + t \cdot t = 1$, ami nem más mint a pont polárisának egyenlete. ■

Látható, hogy az egységkör pontjainak és érintőinek speciális tuljadonságai vannak az általunk definiált leképezésnél. Leképezésünket szokás az egységkörre vonatkozó *polaritásnak* is nevezni.

Az egységkörre vonatkozó polaritás segítségével könnyen definiálhatjuk az egy tetszőleges k körre vonatkozó polaritást: A koordinátarendszert eltolva és az egységet alkalmasan megváltoztatva elérhetjük, hogy k legyen az egységkör. Ezután pedig alkalmazhatjuk az egységkörnél leírt definíciót. Az eddig leírt tulajdonságok nyilván érvényesek maradnak. Egyszerűen beláthatjuk a körre vonatkozó polaritás néhány további fontos tulajdonságát is.

4. *Ha a P pont a k körön kívül helyezkedik el, akkor a P-ből k-hoz húzott e és f érintők E és F érintési pontjait összekötő p egyenes éppen P polárisa* (2. *ábra*).

A 3. tulajdonság alapján E polárisa e, F polárisa pedig f. Mivel P illeszkedik e-re is és f-re is, ezért a 2. tulajdonság alapján p átmegy E-n is, és F-en is. ■

5. *Ha a P és Q pontok polárisai a p és q nem párhuzamos egyenesek, akkor az M metszéspontjuk polárisa a PQ egyenes.*

A 2. tulajdonság alapján M polárisa átmegy P-n is és Q-n is, tehát csak a PQ egyenes lehet. ■

6. *Ha a p, q és r egyenesek egy, a k középpontjától különböző ponton mennek át, akkor pólusaik P, Q és R egy egyenesre illeszkednek.*

Legyen p, q és r közös pontja M, ennek polárisa pedig m. (Az m egyenes létezik, mert M különbözik k középpontjától.) A 2. tulajdonság alapján m-re illeszkedik P is, Q is és R is. ■

6'. *Ha a P, Q és R pontok egy, a k középpontján át nem menő egyenesre illeszkednek, akkor polárisaik p, q és r egy ponton mennek át.*

Legyen P, Q és R összekötő egyenese m, ennek pólusa pedig M. (Az M pont létezik, mert m nem megy át k középpontján.) A 2. tulajdonság alapján M-en átmegy p is, q is és r is. ■

A 6. és 6'. állítások a polaritás egy fontos tulajdonságát mutatják: Ha egy tételben csak pontok, egyenesek, ezek polárisai, pólusai valamint összekötés és metszés szerepel, akkor a pontok és egyenesek, valamint az összekötés és a metszés szerepeit felcserélve ismét igaz állítást kapunk. Az így kapott tételt az eredeti duálisának, az elvet pedig a *dualitás elvének* nevezzük.

1. feladat: Fogalmazzuk meg az 1–5. állítások duálisait .

Kör köré írt sokszögek

Tekintsünk egy olyan hatszöget, melynek semelyik két oldala nem párhuzamos, és mindegyik oldalegyenese érint egy k kört. Jelöljük az oldalegyeneseket 1, 2, 3, 4, 5 és 6-tal; az i és a j egyenes metszéspontját pedig ij-vel (i, $j = 1$, 2, ..., 6.) Megmutatjuk, hogy az 12 és 45; a 23 és 56 valamint a 34 és a 61 metszéspontokat összekötő e, f és g egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. Ez az állítás a *Brianchon tétel* egy speciális esete.

Jelöljük a k kör síkját $\mathcal{S}$-sel, a k kör és az i egyenes érintési pontját E_i-vel. Állítsunk az 12, 23, 34, 45, 56 és 61 metszéspontokban $\mathcal{S}$-re merőleges egyeneseket és mérjük fel ezekre az egyes pontokból a k-hoz húzható érintőszakaszok hosszát, mégpedig az 12, 34 és 56 pontokból az $\mathcal{S}$ egyik, a 23, 45 és 61 pontokból pedig az $\mathcal{S}$ másik oldalára. Legyenek az így kapott pontok $12'$, $23'$, $34'$, $45'$, $56'$ és $61'$ (*3. ábra*). Ezek a pontok egy olyan térbeli hatszöget alkotnak, amelyben az $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ és $6'$-vel jelölt oldalegyenesek $\mathcal{S}$-re való merőleges vetületei éppen az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 egyenesek, és a térbeli hatszög oldalegyenesei az E_i pontokban döfik $\mathcal{S}$-t. Ugyanis a térbeli hatszög mindegyik oldalegyenese egy-egy olyan síkban van benne, amely $\mathcal{S}$-re merőleges és az 1, 2, 3, 4, 5, 6 egyenesek valamelyikét is tartalmazza, továbbá ezen síkok mindegyikében a benne lévő E_i pont, a térbeli hatszög csúcsai és az eredeti hatszög csúcsai két-két egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak. Az $12'$ és $45'$; a $23'$ és $56'$ valamint a $34'$ és a $61'$ pontokat összekötő e', f' és g' egyenesek $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetületei nyilván az e, f és g egyenesek.

Megmutatjuk, hogy az e', f', g' egyenesek közül bármelyik kettő egy síkban van. Az egyenesek szerepe teljesen szimmetrikus, ezért elég azt megmutatnunk, hogy pl. e' és f' egy síkban vannak. Az e' is és f' is metszi a $2'$ és az $5'$ egyenest, ezért elég belátnunk hogy ez utóbbiak egysíkúak. Mivel az $12'$ és $56'$ pontok $\mathcal{S}$-nek az egyik, a $23'$ és a $45'$ pontok pedig $\mathcal{S}$-nek a másik oldalán vannak, ezért a $2'$ és az $5'$ egyenes is ugyanabban az $\mathcal{S}$ által meghatározott féltérben metszi a 25 pontban $\mathcal{S}$-re állított merőleges egyenest, sőt mindkettő pontosan abban a pontban, amely $\mathcal{S}$-től olyan távolságra van, mint a 25 pontból k-hoz húzott érintő hossza. Tehát $2'$ és $5'$, s így e' és f' is egy síkban van.

Az e', f' és g' egyenesek nincsenek ugyanabban a síkban, mert ha mindhárom benne lenne egy $\mathcal{T}$ síkban, akkor $\mathcal{T}$ tartalmazná az $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ egyenesek mindegyikét, ami nem lehetséges, mert az $12'$, $23'$, $34'$, $45'$, $56'$, $61'$ pontok nincsenek egy síkban. Ha viszont három egyenes nincs egy síkban, de közülük bármelyik kettő igen, akkor a három egyenes vagy egy ponton megy át, vagy párhuzamos (lásd pl.: *Geometriai feladatok gyűjteménye I,* 1703. és 1710. feladatok). Ekkor viszont az e', f', g' egyenesek $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetületei, e, f és g is vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak. ■

A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy az érintőhatszög konvex, sőt azt sem, hogy az oldalakat „sorban" számoztuk. Bizonyításunk működik pl. a *4. ábrán* látható hatszög esetén is. Sőt egyéb esetekben is. Ha egy kör két érintőjét úgy mozgatjuk, hogy az érintési pontjaik egyre közelebb kerüljenek egymáshoz, akkor a két érintő egyre kisebb szöget fog egymással bezárni, metszéspontjuk pedig egyre közelebb kerül az érintési pontokhoz. Ennek alapján feltételezhetjük, hogy tételünk esetleg akkor is igaz, ha az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 egyenesek közül némelyek egybeesnek, és két egybeeső érintő metszéspontjának a közös érintési pontjukat tekintjük.

Tegyük fel, hogy az 1 és 2, valamint a 4 és 5 érintőegyenesek esnek egybe. Ekkor egy érintőnégyszöget kapunk (*5. ábra*), tételünk pedig azt mondja, hogy *az érintőnégyszög átlói, valamint az egyik szemközti oldalpáron lévő érintési pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át.* Nézzük a bizonyítást:

Használjuk ugyanazokat a jelöléseket, mint az előbb. A 23, 34, 56 és 61 pontokban $\mathcal{S}$-re állított merőlegeseken ugyanúgy kapjuk a $23'$, $34'$, $56'$ és $61'$ pontokat mint az előbb, az $12'$ és a $45'$ pontok pedig most egybeesnek az 12 és a 45 pontokkal, azaz a két érintési ponttal (hiszen az ezekből a pontokból k-hoz húzott érintő hossza 0). Most is igaz, hogy az $12'$ és $45'$; a $23'$ és $56'$ valamint a $34'$ és a $61'$ pontokat összekötő e', f' és g' egyenesek $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetületei az e, f és g egyenesek. Az is igaz, hogy pl. e' és f' egy síkban vannak, mert az $56'$ pont $\mathcal{S}$-nek az egyik, a $23'$ pedig $\mathcal{S}$-nek a másik oldalán van ($12'$ és $45'$ $\mathcal{S}$-en van), ezért a $2'$ és az $5'$ egyenes most is metszi egymást.

Ha egy kicsit megváltoztatjuk az oldalak számozását (*6. ábra*) akkor azt kapjuk, hogy a másik szemközti oldalpáron lévő érintési pontokat összekötő egyenes is átmegy az átlók metszéspontján. Összefoglalva tehát bebizonyítottuk, hogy *az érintőnégyszög átlói, valamint a szemközti oldalpárokon lévő érintési pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át.*

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a *7. ábrán* látható három egyenes egy ponton megy át.

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe írt kör érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek egy ponton mennek át (*8. ábra*). (Lásd: *Geometriai feladatok gyűjteménye I,* 1266. feladat.)

Pascal tétele

Alkalmazzuk most az 1. fejezetben megismert polaritást a 2. fejezetben szereplő k körre és a köréírt hatszögre. A 4. tulajdonság alapján az ij pont polárisa az E_iE_j egyenes. Ezért az 5. tulajdonság alapján az 12 és 45 pontokat összekötő egyenes pólusa az E_1E_2 és az E_4E_5 egyenesek A metszéspontja. Ugyanígy kapjuk, hogy a 23 és 56 pontokat összekötő egyenes pólusa az E_2E_3 és az E_5E_6 egyenesek B metszéspontja, a 34 és 61 pontokat összekötő egyenes pólusa pedig az E_3E_4 és az E_6E_1 egyenesek C metszéspontja. (Az 12 és 45, a 23 és 56 valamint a 34 és 61 pontok összekötőegyenese nem megy át k középpontján, mert a k köré írt hatszög semelyik két oldala nem párhuzamos, ezért mindhárom egyenesnek létezik pólusa.) Brianchon tétele szerint az 12 és 45, a 23 és 56 valamint a 34 és 61 pontok összekötőegyenese egy ponton megy át, ezért a 6. tulajdonság alapján pólusaik, A, B és C egy egyenesre illeszkednek. Ezzel bebizonyítottuk *Pascal tételének* egy speciális esetét:

Ha a k körbe írt $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$ hatszög E_1E_4, E_2E_5 és E_3E_6 átlói nem mennek át k középpontján, továbbá az E_1E_2 és E_4E_5, E_2E_3 és E_5E_6 valamint E_3E_4 és E_6E_1 oldalegyenesei nem párhuzamosak, akkor e három oldalpár metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

A bizonyítás során most sem használtuk ki, hogy a körbeírt hatszög konvex, sem azt, hogy a csúcsokat „sorban" számoztuk. Bizonyításunk ismét működik abban az esetben is, ha a hatszög néhány csúcsa egybeesik. Két egybeeső csúcs összekötő egyenesének a k-hoz az egybeeső csúcsokban húzott érintőt kell tekintenünk. A *8. ábrán* látható háromszögekre vonatkozó tétel megfelelője pl. a *9. ábrán* látható állítás:

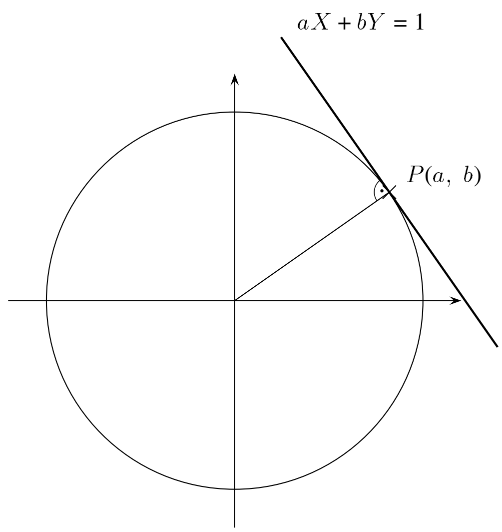
Ha egy háromszögbe írt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög oldalai metszik az eredeti háromszög szemközti oldalait, akkor ez a három metszéspont egy egyenesre illeszkedik.

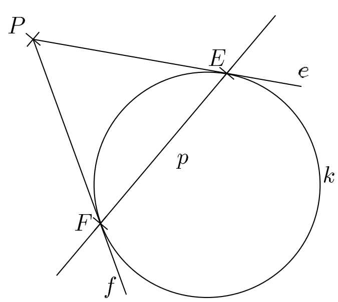
4. feladat: Fogalmazzuk meg a kör köré írt ötszögre, illetve az érintőnégyszögre vonatkozó állítások megfelelőit.

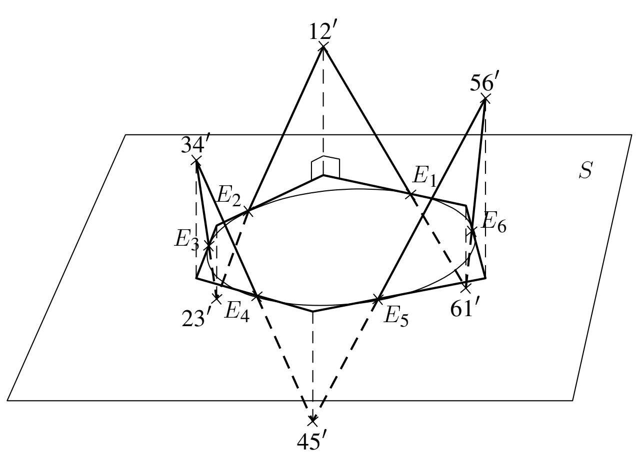
5. feladat: Oldjuk meg az **F. 3253.** feladatot (megtalálható a kitűzött feladatok között a 489. oldalon).

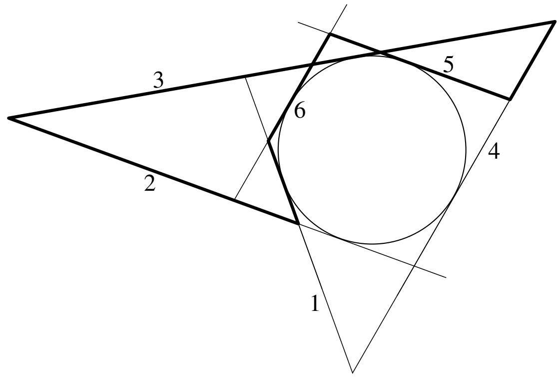
Tételeink megfogalmazásában sok problémát okozott, hogy a k kör középpontjának nem értelmeztük a polárisát, a rajta átmenő egyeneseknek pedig a pólusát. Ezért a Brianchon és Pascal tételek megfogalmazásakor sok kikötést kellett tennünk. Ezeket a nehézségeket el lehet kerülni, ha a polaritást nem az euklidészi síkon, hanem a *projektív síkon* definiáljuk. Az említett tételek igazából a projektív sík kúpszeleteiről szólnak, ennek ismertetése azonban meghaladja e cikk kereteit. Az érdeklődő olvasó ezek részletes leírását megtalálhatja pl. *Hajós György: Bevezetés a geometriába*, (Tankönyvkiadó, Budapest, 1985) vagy *Schopp János: Kúpszeletek* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1972) című könyveiben.

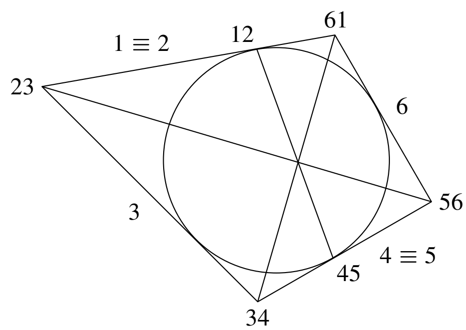
Kiss György

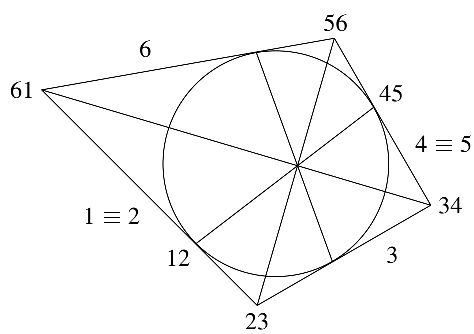







3
5
6
4
2
1


1 ≡ 2
12
61
23
6
56
3
45
4 ≡ 5
34


56
6
61
45
4 ≡ 5
34
1 ≡ 2
12
3
23