[1]A versenybeszámoló szeptemberi számunkban jelent meg.

9. osztály

1. Ismeretes, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000$$

Milyen számjegyek állnak az a és b helyén?

Szabó Magda, Szabadka

2. Az AFE hegyesszögű háromszög ED és FB magasságvonalai a C pontban metszik egymást. Az M, N, P, Q pontok rendre az FC, EC, AE és AF szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy az $MNPQ$ négyszög téglalap.

Kórizs Júlia, Bácskatopolya

3. Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leq 2, x_2 + \frac{1}{x_3} \leq 2, \vdots\ x_{1997} + \frac{1}{x_{1998}} \leq 2, x_{1998} + \frac{1}{x_1} \leq 2.$$

Oláh György, Révkomárom

4. Az $A_1A_2\dots A_n$ és $B_1B_2\dots B_n$ szabályos n-szögek úgy metszik egymást, hogy az A_1A_2 és B_nB_1 oldalak közös pontja K_1, az A_1A_2 és B_1B_2 közös pontja K_2, az A_2A_3 és B_1B_2 közös pontja K_3, A_2A_3 és B_2B_3 közös pontja K_4, $\dots$, A_nA_1 és $B_{n-1}B_n$ közös pontja K_{2n-1}, az A_nA_1 és B_nB_1 közös pontja K_{2n}. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1K_1}{B_1K_1} \cdot \frac{B_1K_2}{A_2K_2} \cdot \frac{A_2K_3}{B_2K_3} \cdot \frac{B_2K_4}{A_3K_4} \cdot \dots \cdot \frac{A_nK_{2n-1}}{B_nK_{2n-1}} \cdot \frac{B_nK_{2n}}{A_1K_{2n}} = 1.$$

(A K_i pontok az oldalak belső pontjai, $i = 1, 2, \dots, 2n$.)

Bencze Mihály, Brassó

5. Egy négyzet alakú 1998×1998 egybevágó négyzet alakú mezőből álló táblán 1997 mezőt már befestettek. Befesthető minden olyan, eddig még be nem festett mező, amelynek legalább két szomszédja már be van festve. Két mezőt akkor tekintünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk. Bizonyítsuk be, hogy az egész táblát nem lehet befesteni.

Balázsi Borbála, Beregszász

6. Nevezzük „szépnek" az $a^2 + 2b^2$ alakú számokat, ahol a és b pozitív egész számokat jelöl. Bizonyítsuk be, hogy az így értelmezett „szép" számok közül akárhányat összeszorozva újra „szép" számot kapunk.

Kiss Sándor, Nyíregyháza

10. osztály

1. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = a + b\sqrt{2}.$$

Kórizs Júlia, Bácskatopolya

2. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az

$$\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 10n^2 + 16}$$

tört nem egyszerűsíthető.

Balázsi Borbála, Beregszász

3. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész x, y, z számokból álló számhármast, amelyre teljesül a következő két egyenlet:

$$x^3 + 3y^3 + z^5 + z = 1998, y^2z = x.$$

Oláh György, Révkomárom

[1]*

4. Legyen d egy A kezdőpontú félegyenes, és α egy olyan változó szög, amely 0° és 90° között minden értéket felvesz. A d félegyenesen úgy választjuk ki a B pontot, hogy $AB = \operatorname{tg}\alpha$ teljesüljön, és úgy szerkesztjük meg AB fölé az ABC háromszöget, hogy $BAC\sphericalangle = \alpha$, $AC = \sin\alpha$ teljesüljön. Mit írnak le a C pontok, ha α minden lehetséges értéket felvesz?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

5. Egy háromszög oldalainak a, b, c mértékszámai egész számok, és tudjuk, hogy az egyik magassága a másik két magasság összegével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2$ négyzetszám.

Katz Sándor, Bonyhád

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$n^{4(x_1^2+x_2)} + n^{4(x_2^2+x_3)} + \cdots + n^{4(x_n^2+x_1)} = 1,$$

ahol $n \geq 2$ egész szám.

Bencze Mihály, Brassó

11. osztály

1. Adottak az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{37}, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{37}, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{37}$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan i, j, k egész szám, hogy $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $1 \leq i,\ j,\ k \leq 37$, továbbá

$$\frac{a_i + a_j + a_k}{3}, \qquad \frac{b_i + b_j + b_k}{3}, \quad \text{valamint} \quad \frac{c_i + c_j + c_k}{3}$$

is egész.

Kiss Sándor, Nyíregyháza

2. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben érvényes a

$$\frac{bc}{\varrho_a^2} + \frac{ac}{\varrho_b^2} + \frac{ab}{\varrho_c^2} \geq \frac{abc}{2\varrho T}$$

egyenlőtlenség, ahol a, b, c a háromszög oldalai, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c a megfelelő oldalakhoz hozzáírt körök sugarai, ϱ a háromszögbe írható kör sugara, T pedig a háromszög területe.

Oláh György, Révkomárom

4. Adottak az a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, $a + (n-1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$ egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek.

Zolnai Irén, Újvidék

4. Egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek az egyik oldala az x, egy másik oldala az y tengelyre illeszkedjék. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat.

Bogdán Zoltán, Cegléd

5. Legyenek $k \geq 1$, $n \geq 2$ adott egész számok. Számítsuk ki

$$\left(\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{k+1} + \sqrt[n]{k+2}\right)^n$$

egész részét (egy x szám egész része az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél).

Bencze Mihály, Brassó

6. Adottak a $2, 3, 4, \ldots, 1998, 1999$ számok és a belőlük képzett összes különböző tényezőkből álló két, három, $\ldots$, 1998 tényezős szorzat (összesen $2^{1998} - 1$ szám.) Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész szám.

Katz Sándor, Bonyhád

12. osztály

1. Melyek azok a valós számokon értelmezett, valós értékű f függvények, amelyek minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén kielégítik az

$$x \cdot f(y) = y \cdot f(x)$$

egyenletet?

Árokszállási Tibor, Paks

2. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{6z}=\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}}, x+y^2+z^3=14$$

egyenletrendszert a pozitív valós számok halmazán.

Neubauer Ferenc, Munkács

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^3+ax^2+bx+c=0$ egyenlet összes gyöke valós szám, akkor $a^2\geq 3b$ (a, b, c adott valós számok).

Oláh György, Révkomárom

4. Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének sugara r, köré írható gömbjének sugara R. Igazoljuk, hogy

$$\frac{R}{r}\geq\sqrt{2}+1.$$

Szabó Magda, Szabadka

5. Az (a_n) valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1=a_2=2 \qquad \text{és} \qquad a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}, \qquad \text{ha } n\geq 2.$$

Igazoljuk, hogy bármely $k\geq 1$ esetén

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_k.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

6. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán az

$$x+y+z=xyz, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

egyenletrendszert.

Bencze Mihály, Brassó