Escher síklefedési kísérletezései során felfedezett egy matematika tételt. Egy derékszögű, 3, 4 és 5 egység oldalú háromszögből elkészítette az itt látható nyomómintát. Ennek segítségével különböző érdekes mintákat kapott, ilyen látható az első borítón.

A háromszög látványos mintáját úgy kapta, hogy felosztotta a megfelelő oldalakat 3, 4, illetve 5 egyenlő részre. A szemközti osztópontokat összekötötte egymással és a csúcsokkal. Esetenként e szakaszok közül három egy pontban metszette egymást.

Ez a felfedezés indította Eschert általános háromszögek szemközti osztópontjait összekötő szakaszok módszeres vizsgálatára.

2. ábra

Escher tételének 17 esete

Mit állít a tétel?

Escher tételét a következő bekezdésben fogalmazzuk meg, ahol mind a 17, egy ponton átmenő szakaszhármast megadjuk. Ezekben az esetekben a három szakasz nemcsak egy ponton megy át, hanem az összekötő szakaszokat a metszéspont „szép" arányban osztja. Az *1. ábra* a 15. esetnek megfelelő felosztást mutatja, ahol a három összekötőszakasz egymást az S pontban metszi, az arányok pedig $AS:SD=3:1$, $BS:SE=1:1$ és $CS:SF=3:7$.

A tétel

Escher eredeti megfogalmazása a következő:

Tétel. *Egy tetszőleges háromszög egy tetszőleges oldalát* 5*, egy másik oldalát* 4*, a harmadik oldalát* 3 *egyenlő részre osztjuk. Az osztópontokat egymással és a csúcsokkal összekötő szakaszok között található* 3 *olyan összekötő szakasz, amely egy ponton megy át, és a metszéspont úgy osztja két részre ezeket a szakaszokat, hogy az osztási arány kis egész számokkal kifejezhető.*

Összesen 17 olyan eset van, amikor 3 szakasz 1 ponton megy át.

I. csoport: (1–2. eset) a 3 szakasz a 3 csúcsból indul.

II. csoport: (3–6. eset) 2 szakasz indul csúcsból.

III. csoport: (7–14. eset) 1 szakasz indul csúcsból.

IV. csoport: (15–17. eset) egyik szakasz sem indul csúcsból.

Megjegyzés: a 4., 5., 13. eset metszéspontjai egy egyenesre esnek, amelynek a háromszögbe eső szakaszát 4 egyenlő részre osztják.

Bizonyítás helyett

Így szól Escher megfogalmazásában a tétel. Jó lenne, ha bármely három összekötő szakasz 1 ponton menne át, de ez természetesen nincs így. Escher 17 esetet talált, és ezeket rendre megadta, amint ezt láthattuk.

Hogyan jött rá erre az összefüggésre? Rajzolt egy tetszőleges háromszöget. Berajzolta az *összes* összekötő szakaszt, a vonalak rengetegéből kiszűrte, mely szakaszok mehetnek át egy ponton és melyek nem. Ahogy pontosabban is megrajzolta, látta, mely szakaszok *nem* mennek át egy ponton. De azt, hogy azok, amelyek egy ponton látszanak átmenni, valóban egy ponton mennek is át, Escher nem bizonyította be. (Jan Aarts bizonyítása (15 esetre) megtalálható a Pythagoras című lap honlapján: `www.wins.uva.nl/misc/pythagoras` .)

A KöMaL olvasók is megpróbálkozhatnak a bizonyítással.

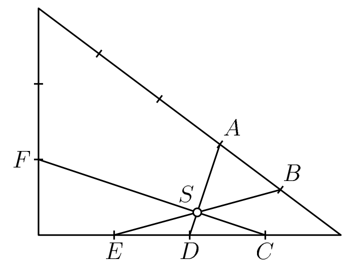
További kérdések

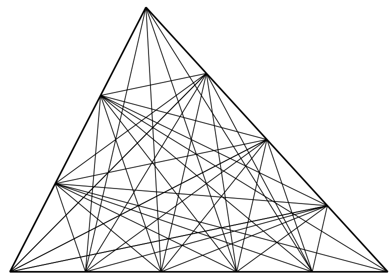
Ha a háromszög oldalait nem 3, 4, illetve 5 egyenlő részre osztanánk, hanem más arányban (pl. 2, 3 és 5 vagy 2, 4, 5 egyenlő részre), vajon hány szakaszhármas menne át egy ponton? Próbáljuk meg ezeket az eseteket is megvizsgálni.

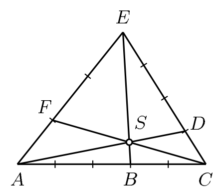
(*Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy speciálisan a 2, 2, 2 részre való felosztás esetén a súlyvonalakat és a középvonalakat kapjuk.)

Chris Zaal, Pythagoras

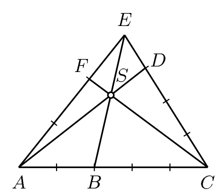
(Fordította: Fried Katalin)



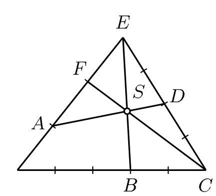




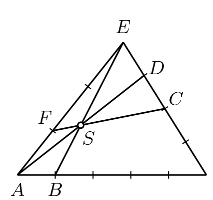
1. eset
$AS:SD = 2:1$
$BS:SE = 1:5$
$CS:SF = 1:1$



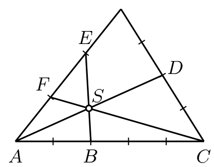
2. eset
$AS:SD = 8:3$;
$BS:SE = 6:5$;
$CS:SF = 9:2$;



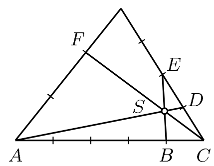
3. eset
$AS:SD = 2:1$
$BS:SE = 1:1$
$CS:SF = 1:2$



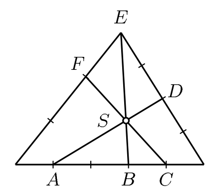
4. eset
$AS:SD = 1:1$
$BS:SE = 3:5$
$CS:SF = 4:1$



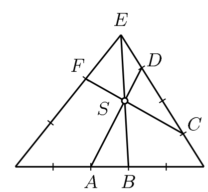
5. eset
$AS:SD$ = 1:1
$BS:SE$ = 3:5
$CS:SF$ = 4:1



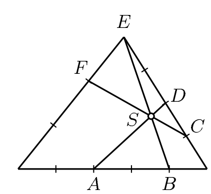
6. eset
$AS:SD$ = 8:1
$BS:SE$ = 4:5
$CS:SF$ = 1:2



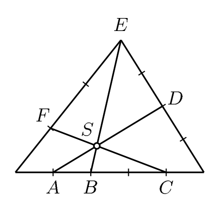
7. eset
$AS:SD$ = 2:1
$BS:SE$ = 1:2
$CS:SF$ = 1:1



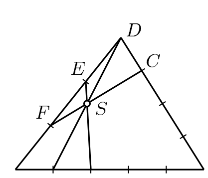
8. eset
$AS:SD$ = 2:1
$BS:SE$ = 1:1
$CS:SF$ = 3:2



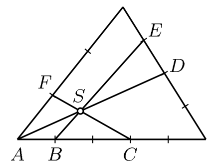
9. eset
$AS:SD$ = 4:1
$BS:SE$ = 2:3
$CS:SF$ = 9:16



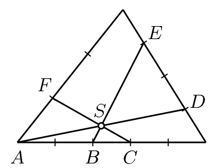
10. eset
$AS:SD$ = 2:3
$BS:SE$ = 1:4
$CS:SF$ = 3:2



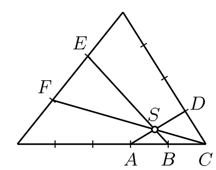
11. eset
$AS:SD$ = 1:1
$BS:SE$ = 3:1
$CS:SF$ = 3:2



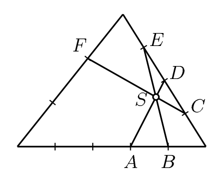
12. eset
$AS : SD = 3 : 4$
$BS : SE = 2 : 5$
$CS : SF = 9 : 5$



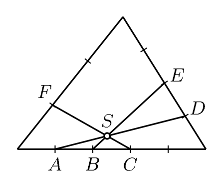
13. eset
$AS : SD = 1 : 1$
$BS : SE = 1 : 5$
$CS : SF = 3 : 5$



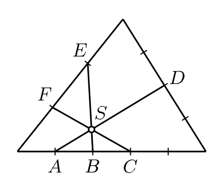
14. eset
$AS : SD = 4 : 5$
$BS : SE = 1 : 5$
$CS : SF = 1 : 2$



15. eset
$AS : SD = 3 : 1$
$BS : SE = 1 : 1$
$CS : SF = 3 : 7$



16. eset
$AS : SD = 2 : 3$
$BS : SE = 1 : 4$
$CS : SF = 3 : 7$



17. eset
$AS : SD = 1 : 2$
$BS : SE = 1 : 3$
$CS : SF = 1 : 1$