$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(1+x+x^2+x^3+x^4)S(x). \tag{1}$$

I. megoldás. Tetszőleges $F(x)$ polinomra igaz, hogy $F(x)-F(1)$ osztható $(x-1)$-gyel. Legyen ugyanis $F(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ ekkor $F(x)-F(1)=a_n(x^n-1)+\ldots+a_1(x-1)$, amelyben minden tag osztható $(x-1)$-gyel.

A $P,\ Q,\ R$ polinomokat ennek alapján írjuk a következő alakba

$$P(x)=(x-1)p(x)+P(1),$$
$$Q(x)=(x-1)q(x)+Q(1),$$
$$R(x)=(x-1)r(x)+R(1).$$

A polinomokra érvényes az (1) egyenlőség, ezért

$$(x^5-1)[p(x^5)+xq(x^5)+x^2r(x^5)]+P(1)+xQ(1)+x^2R(1)=$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4)S(x).$$

Mivel (x^5-1) osztható $(1+x+x^2+x^3+x^4)$-nel, ezért az egyenlőség minden x-re csak akkor teljesül, ha $P(1)+xQ(1)+x^2R(1)$ is osztható $(1+x+x^2+x^3+x^4)$-nel. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $P(1)=Q(1)=R(1)=0$, amiből következik, hogy $P(x),\ Q(x),\ R(x)$ egyaránt osztható $(x-1)$-gyel.

Az egyenlőségből látható, hogy $S(1)=0$ is teljesül, tehát $S(x)$ is osztható $(x-1)$-gyel.

Dózsa Gábor (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A polinomok között fennálló (1) egyenlőséget írjuk a

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=\frac{x^5-1}{x-1}S(x)$$

alakba. Jelentse z az egytől különböző négy komplex ötödik egységgyök valamelyikét. Ezekre $z^5-1=0$, de $z-1\neq 0$, így

$$P(1)+zQ(1)+z^2R(1)=0.$$

Ez z-re nézve másodfokú egyenlet, másrészt tudjuk, hogy van négy különböző megoldása, ami csak úgy lehetséges, ha $P(1)=Q(1)=R(1)=0$, tehát $P(x)$ osztható $(x-1)$-gyel.

Homonnay Géza (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Egyik megoldás sem használta ki, hogy a polinomok egész együtthatósak, valós (sőt komplex) együtthatók is megengedhetők.

2. Mindkét megoldásból látható, hogy

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)+x^3T(x^5)=(1+x+x^2+x^3+x^4)S(x)$$

feltétel esetén is igaz az állítás. Általában, ha

$$P_1(x^n)+xP_2(x^n)+\ldots+x^{n-2}P_{n-1}(x^n)=(1+x+\ldots+x^{n-1})P_n(x),$$

akkor mindegyik $P_i(x)$ polinom osztható $(x-1)$-gyel.

(G.L.)