A feladat a következő volt: *Egy* 100 *sorból és* 100 *oszlopból álló táblázat első oszlopában csupa* 1*-es található,* k*-adik sorában pedig olyan számtani sorozat, amelynek differenciája* k*. A táblázat bal alsó sarkától jobb felső sarkáig húzódó átlója mentén elhelyezkedő számok közül melyik a legnagyobb?*

Thiry Gábor megoldásában (lásd a 278. oldalon) szerepel az, hogy az említett átló mentén elhelyezkedő számok egy parabola pontjaiként ábrázolhatók. Persze ezek a pontok „diszkréten" helyezkednek el. Képzeljük el azonban, hogy a táblázatnak nemcsak egész indexű sorai és oszlopai vannak, hanem az indexek tetszőleges valós értékeket felvehetnek. Eredetileg a táblázat i-edik sorában az első helyen 1 áll, és ezután egy i különbségű számtani sorozat. A j-edik helyen álló szám tehát $1+i\cdot(j-1)$. Feltevésünk szerint az oszlopindexek tehát nemcsak a $j=1,\ 2,\ \ldots,\ 100$ értéket vehetik fel, hanem bármilyen x valós számot. A sorok indexei pedig nemcsak az $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 100$ értéket vehetik fel, hanem itt is tetszőleges valós y számot. Ekkor az y-adik sorban egy y differenciájú számtani sorozatnak kellene állni, aminek így természetesen nincsen értelme. Ha viszont a táblázatban szereplő $1+i\cdot(j-1)$ kifejezésben j helyébe x-et és i helyébe y-t írunk, akkor a $z=1+y\cdot(x-1)$ függvényhez jutunk. Az $x,\ y\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 100\}$ esetben természetesen az eredeti táblázat adódik.

Tekintsük most a térbeli $x,\ y,\ z$ koordinátarendszerben az összes olyan pontot, amelyeknek a koordinátái ezt a feltételt kielégítik. Ez egy geometriai alakzat, amely „nyilván" egy felület. Egy „sor"-nak rögzített y felel meg, ami egy, az $x,\ z$ síkkal párhuzamos egyenesnek az egyenletét adja. Ezt a felületet tehát egy „egyenessereg" „súrolja végig". Amikor az első oszlopot nézzük, annak az $x=1$ eset felel meg. Ez az egyenlet egy, az $y,\ z$ síkkal párhuzamos síkot jelent. Ekkor eredeti egyenletünkből a $z=1$ egyenlet adódik. Ez is egy egyenes egyenlete; egy olyan egyenesé, amely nem szerepel az előbb felsoroltak között. A „mellékátlón" levő $x,\ y$ koordinátákat az jellemzi, hogy összegük állandó. Az eredeti feladatban ez az összeg 101 volt, de számunkra ez nem lényeges; legyen az összeg c. Ebből azt kapjuk, hogy

$$z=1+y\cdot(x-1)=1+(c-x)\cdot(x-1)=-x^2+(c+1)x+1-c,$$

ami valóban egy parabola egyenlete. Ha „meg akarjuk érteni", hogy milyen felületet kaptunk, akkor célszerű más koordinátarendszert felvenni. Tekintsük azt az $x',\ y',\ z'$ koordinátarendszert, amelynek a középpontja az eredeti koordinátarendszer $(1,\ 0,\ 1)$ pontja, és az eredeti koordinátarendszerből annak eltolásával keletkezik. Ez azt jelenti, hogy az új koordinátarendszerben az x irányú és z irányú koordináták az eredetinél 1-gyel kisebbek lesznek, míg az y irányú koordináták nem változnak. Egy P pont $(x',\ y',\ z')$ és $(x,\ y,\ z)$ koordinátái között tehát az $x'=x-1$, $y'=y$ és $z'=z-1$ kapcsolat áll fenn. Az új koordinátarendszerben a vizsgált felület „egyenlete" tehát $z'=y'\cdot x'$.

Az egyszerűség kedvéért hagyjuk itt el a „vesszőket"; ekkor a $z=y\cdot x$ egyenlethez jutunk. Ezen a felületen kétféle „egyenes-sereg" található. Ha az $x=c$ síkkal metszünk, akkor a $z=cy$ egyenesekhez jutunk. Ha pedig az $y=c$ síkkal metszünk, akkor a $z=cx$ egyeneseket kapjuk.

Az eredeti feladat megoldásánál látott gondolat szerint, ha az $x+y=c$ síkkal metszünk, akkor egy „lefelé álló" parabolát kapunk. Ahhoz, hogy jobban láthassuk a felületet, célszerű ismét egy másik koordinátarendszert felvenni. (Megjegyezzük, hogy a *lineáris algebra* keretein belül minden ilyen esetben megmondható, hogy melyik a célszerű koordinátarendszer; sőt ennek felvétele nélkül is eldönthető a vizsgált alakzat „mineműsége". Most viszont csak annyit tudunk tenni, hogy megadjuk a „jó" koordinátarendszert.) A koordinátarendszert a z-tengely körül forgassuk el 45 fokkal. Mivel a z-tengely megmarad, azért elég az egész elforgatást a síkon szemlélni. Egyszerűbb az eljárást úgy végiggondolni, hogy vektorokkal dolgozunk.

Legyenek az x- és y-tengely irányú egységvektorok, megfelelően $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$. Legyenek ezeknek pozitív irányban 45 fokkal való megfelelő elfordítottja $\mathbf{e}^*$ és $\mathbf{f}^*$. Ez azt jelenti, hogy

$$(*)\qquad \mathbf{e}^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{f},\qquad \mathbf{f}^*=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{f}.$$

Ha egy pontnak ebben a koordinátarendszerben a koordinátái $(\xi,\ \eta)$, az azt jelenti, hogy az origóból a pontba mutató $\mathbf{u}$ vektorra $\mathbf{u}=\xi\mathbf{e}^*+\eta\mathbf{f}^*$ adódik. A $(*)$ alatti összefüggés alapján tehát

$$\mathbf{u}=\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{f}\right)+\eta\left(-1/\sqrt{2}\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{f}\right)=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}\mathbf{e}+\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\mathbf{f}.$$

Tekintettel arra, hogy az $\mathbf{u}$ vektor végpontjának eredeti koordinátája $(x,\ y)$, ezért $x=\dfrac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$ és $y=\dfrac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$. Ezt a $z=xy$ összefüggésbe behelyettesítve a $2z=\xi^2-\eta^2$ összefüggéshez jutunk.

Nézzük a fenti összefüggéssel leírt felületet. Ha ezt a felületet „elszeleteljük" a z tengelyre merőleges (tehát „vízszintes") síkkal, akkor minél nagyobb a z, annál „tompább" hiperbolát nyerünk. Ezeknek a hiperboláknak a „csúcsa" a ξ-tengelyen van. Ha egyre közelítünk az $x,\ y$ tengelyek síkjához, akkor a csúcs egyre közelebb kerül a z-tengelyhez. A tengelyek síkjában a hiperbola metsző egyenespárrá „változik át". Ezután pedig a csúcs „átkerül" az η-tengelyre. A fellépő hiperbolák aszimptotapárja mindig a két koordinátatengely. Ez a felület, amelyiknek minden pontján két egyenes haladt át, „tele van" hiperbolákkal.

De hol vannak a már látott parabolák? Ezeket is megtalálhatjuk. Válasszuk ξ-t c konstansnak, azaz messük a felületünket a ξ-tengelyre merőleges síkokkal. A metszet egyenlete $2z=c^2-\eta^2$. Ez mindig egy „csúcsával felfelé álló" parabola, amelynek „csúcsát" pontosan az $\eta=0$ esetben kapjuk. Ha az η-tengelyre merőleges síkkal metszünk, akkor a $2z = \xi^2 - c^2$ egyenletekhez jutunk; amelyek „csúcsukkal lefelé álló” parabolát adnak. Ezek a csúcsok éppen a $\xi = 0$ esetben adódnak. Eszerint a lefelé álló parabolák csúcsai egy fölfelé álló parabolán vannak és viszont.

A fentiek szerint a kapott felületet a következőképpen képzelhetjük el:

Tekintjük a $2z = \xi^2$ parabolát és a „rá merőleges”, de ellentétes irányba nyíló $2z = -\eta^2$ parabolát. Ha az első parabolán párhuzamosan „végigcsúsztatjuk” a másodikat (vagy akár a másodikon az elsőt), akkor éppen a szemügyre vett felületet kapjuk.

És ez a „nagyon görbe” felület „tele van” egyenesekkel!

A kapott felület neve *hiperbolikus paraboloid*. Ezt a nevet nem nagyon kell indokolni. Csak annyit teszünk hozzá, hogy van egy „másik” paraboloid is. Ez, lényegében, a parabola tengelykörüli forgatásából nyert felület, amelyiknek a neve *elliptikus paraboloid*. Az itt bemutatott felületnek van egy másik neve is, *nyeregfelületnek* nevezik, mert igen hasonlít a nyereghez (akár lónyeregre, akár hegynyeregre gondolhatunk). Érdemes megjegyezni, hogy tetszőleges „sima” felület bármely pontjának „kis környezetében”, ha az nem „síkszerű” („hengerszerű”) és nem „gömbszerű”, akkor az olyan, mint egy nyeregfelület.

Fried Ervin