

1. Rendezzük a következő alakra az egyenletet: $\sqrt{x^2 - 10x + 30} = -x^2 + 10x - 18$. Legyen $x^2 - 10x + 30 = y$. Ekkor a $\sqrt{y} = 12 - y$ egyenletet kell megoldanunk. Így $0 \leq y \leq 12$, és ekkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. A négyzetre emelés és a rendezés után kapjuk: $y^2 - 25y + 144 = 0$. Ebből $y_1 = 9$, $y_2 = 16$, de a feltételeknek csak a 9 felel meg. Az $x^2 - 10x + 30 = 9$ egyenletből $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ adódik.

2. Azt láthatjuk, hogy a CF szakasz vízszintes és 3 egység magasan helyezkedik el. Legyenek a függőlegesek megfelelő talppontjai: A', B', C', D', E', F' . Ekkor az $AA'D'D$ derékszögű trapézról tudjuk, hogy a párhuzamos oldalai, $AA' = 4$, $DD' = 6$ egység ($A'D' = 20$, de ezt most nem is fogjuk felhasználni). A látszólagos metszéspont az AD felezőpontja, ami jelen esetben a függőlegesen álló középvonal egyik végpontja. A párhuzamos oldalak számtani közepe adja a középvonal hosszát, ezért az AD felezője 5 egység magasan van. Hasonlóan gondolkodhatunk a $BB'E'E$ derékszögű trapézról is. A megfelelő adatokkal kapjuk, hogy BE felezője 4 egység magasan van. Vagyis a valóságban 1-1 egység távolság van függőlegesen a kérdéses egyenesek között a látszólagos metszéspontnál úgy, hogy itt AD van a legmagasabban és CF a legalacsonyabban.

3. Mivel \bar{c} prím, azért 2, 3, 5, 7 a lehetséges értékek, de \bar{bc} is prím, ezért a 2, 5 kizárt, vagyis \bar{c} csak 3 vagy 7 lehet. Mivel \bar{ab} prím, azért b csak 1, 3, 7, 9 lehet. Vegyük figyelembe, hogy a számjegyek összege 26, valamint a c lehetséges értékeit is; ekkor b csak 7 vagy 9 lehet, mert a többi kevés lenne. A \bar{bc} lehetséges értéke ezek alapján 773, 993, 997, de ennek is prímszámnak kell lenni. A 993 osztható 3-mal, a 773, valamint a 997 prímszám (ellenőrizhetjük, vagy nézzük meg a függvénytáblázatban). Mivel a számjegyek összege 26, azért már csak két ilyen számra gondolhatunk: a 9773-ra vagy az 1997-re. Mivel $9773 = 29 \cdot 337$, az 1997-ről pedig megállapíthatjuk, hogy prím, azért csak egy ilyen szám van, az 1997.

Megjegyzés. Ha a feltételek között nem szerepelt volna a számjegyek összegére vonatkozó megszorítás, akkor hosszabb, de hasonló vizsgálattal jutottunk volna el a megoldáshoz. Akinek van egy kis türelme, fejezze be így is a vizsgálatot! Biztosan kap új számot, mert így a 4337 is megfelel.

4. Mivel C pont az EF szakasz belső pontja, azért $C(c; 9 - c)$, ahol $0 < c < 9$ valós szám. A c és az adott pontok segítségével kifejezhetjük a következő pontok koordinátáit:

$$\begin{aligned} Q &\left(\frac{12+c}{3}; \frac{9-c}{3}\right), \\ R &\left(\frac{2c}{3}; \frac{24-2c}{3}\right), \\ M &\left(\frac{2c+6}{6}; \frac{24-2c}{6}\right), \\ N &\left(\frac{12+c}{6}; \frac{21-c}{6}\right), \\ K &\left(\frac{c}{2}; \frac{9-c}{2}\right), \\ L &(3, 3). \end{aligned}$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{c-6}{6}\right)^2 + \left(\frac{3-c}{6}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{c-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-c}{2}\right)^2}, \quad KL = \sqrt{\left(\frac{c-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-c}{2}\right)^2} = 3 \cdot MN. \text{ Vagyis acrtkl fggetlenlak}$$

5. A megoldandó egyenlet: $2 \sin^6 x - 3 \sin^4 x + \sin^2 x + 2 \cos^6 x - 3 \cos^4 x + \cos^2 x = 0$, ezt ilyen alakban is írhatjuk: $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$. Alkalmazzuk a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \\ \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

Ekkor a behelyettesítések utáni egyenlet: $2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) - 3(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) + 1 = 0$. A beszorzások és összevonások után a bal oldalon is 0 lesz, vagyis azonosságot kaptunk, így minden valós szám megoldása az egyenletnek.

6. A feladatban szereplő kifejezés értelmezési tartománya: csak pozitív számnak van logaritmus, ezért $x > 0$, továbbá a nevezők nem lehetnek 0-val egyenlők, ezért $x \neq 10^5$, valamint $x \neq 10^{-1}$. Mivel $9,8 = \frac{98}{10} = \frac{49}{5} = \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^{-2}$, így az eredeti egyenlet így írható: $\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^{-2}$. Ebből kapjuk: $\frac{2}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x} = -2$. A közös nevezővel, $(-5+\lg x)(1+\lg x)$ -szel szorozhatunk, és (-2) -vel oszthatunk: $2(-5+\lg x) - (1+\lg x) = (-5+\lg x)(1+\lg x)$. A beszorzások és összevonások után kapjuk: $\lg^2 x - 5 \lg x + 6 = 0$, amiből $\log x_1 = 2$, $\log x_2 = 3$. Így a megoldások: $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

7. Legyen a két metszéspont A és B . Legyen egy tetszőleges, de a metszéspontoktól különböző pont az egyik körvonalon C , a másikon D . Mivel a körvonalak nem egy síkban vannak, azért $ABCD$ egy tetraédert határoz meg. Minden tetraéder köré lehet gömböt írni (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye, I. 1946. feladat). Az $ABCD$ tetraéder köré írt gömböt az ABC háromszögre illeszkedő síkkal, illetve az ABD háromszögre illeszkedő síkkal metszve a két háromszög köré írt két kör pontosan az eredetileg megadott egymást metsző két kör lesz. Így beláttuk, hogy létezik a keresett gömbfelület.

8. Jelöljük n -nel annak a napnak a sorszámát, amikor befejezik a munkát. Ha az n értéke 1, 2 vagy 3, akkor nem lehet szétosztani az aranyat, ezt könnyen ellenőrizhetjük. Az n -edik napig $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ gramm aranyat ástak ki. A feltétel szerint ennek oszthatónak kell lennie 3-mal, ami azt jelenti, hogy $3 \mid n$ vagy $3 \mid (n+1)$.

Még azt is meg kell mutatnunk, hogy ha $3 \mid n$ vagy $3 \mid (n+1)$, akkor a szétosztás valóban elvégezhető.

Ha $n = 5$, akkor a szétosztás: $1 + 4, 2 + 3, 5$. Ha $n = 6$, akkor: $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4$. Ha $n = 8$, akkor: $1 + 2 + 3 + 6, 4 + 8, 5 + 7$. Ha $n = 9$, akkor: $1 + 2 + 3 + 4 + 5, 6 + 9, 7 + 8$.

Egy nagyobb n esetén, amelyre $3 \mid n$ vagy $3 \mid (n+1)$, a következő módon készíthetünk egy elosztást. Határozzuk meg az n 6-tal való osztási maradékát, ez 5, 0, 2 vagy 3 lehet, ezekhez rendre az első 5, 6, 8 vagy 9 értéket az előbb leírtak alapján mátszétoszthatjuk. Továbbá még 6-tal osztható számú aranyunk van. Itt pedig felhasználjuk, hogy egymást követő hat egész szám esetén $(k+1) + (k+6) = (k+2) + (k+5) = (k+3) + (k+4)$, így a feltételnek eleget tevő minden számra megvalósítható a szétosztás, vagyis minden olyan napon befejezhetik a munkát, amelynek a sorszáma 3-nál nagyobb, és hárommal osztható, vagy hárommal osztva 2-t ad maradékul.

Számadó László