I. megoldás. Vizsgáljuk a $\cos x^2$ függvény pozitív zérushelyeinek elhelyezkedését. A nagyság szerint k adik zérushely

$$x_k = \sqrt{(2k-1)\frac{\pi}{2}} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

A szomszédos zérushelyek távolsága:

$$x_{k+1} - x_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(2k-1)\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}.$$

Ebből látható, hogy a szomszédos zérushelyek távolsága egyre csökken:

$$x_{k+2} - x_{k+l} < x_{k+l} - x_k.$$

Emiatt a $\cos x^2$ függvény valóban nem lehet periodikus, hiszen ha az lenne, az origótól tetszőlegesen messze is fordulnának elő olyan szomszédos gyökhelyei, amelyek távolsága megegyezik $(x_2 - x_1)$-gyel.

Hajnal Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a $\cos x^2$ függvény periodikus, periódusát jelöljük p-vel ($p > 0$). Ekkor minden valós x-re

$$\cos(x+p)^2 = \cos x^2, \tag{1}$$

ahonnan azt kapjuk, hogy minden rögzített x-re van olyan k egész szám, hogy vagy

$$(x+p)^2 = x^2 + 2k\pi, \tag{2}$$

vagy

$$(x+p)^2 = -x^2 + 2k\pi. \tag{3}$$

A (2) egyenlet minden rögzített k-ra elsőfokú, így pontosan egy x érték elégíti ki, a (3) egyenlet minden rögzített k-ra másodfokú, így legfeljebb két valós x érték elégíti ki. A (2) és (3) egyenlőségeket kielégítő összes különböző valós számok tehát csak megszámlálható halmazt alkotnak. Így ellentmondásra jutottunk, az (1) egyenletet nem elégítheti ki minden valós szám, tehát $\cos x^2$ függvény nem periodikus.

Kőkúti Róbert (Veszprém, Lovassy L. Gimn., IV. o. t.)