A William Lowell Putnam nevét viselő matematikaverseny 1938-ban indult. Az Egyesült Államok és Kanada főiskoláin és egyetemein minden évben megrendezik. A névadó az egykori harvardi diák 1921-ben cikket írt az iskola folyóiratába, amelyben egy főiskolák közötti szellemi vetélkedés előnyeire hívta fel a figyelmet. Halála után özvegye hozta létre a William Lowell Putnam főiskolák közötti emlékalapítványt. Az első versenyt angol nyelvből rendezték, és csak pár évvel később indult matematikából. Az özvegy 1935-ben bekövetkezett halála óta az Amerikai Matematikai Társulat szervezi a vetélkedőt.

Résztvevő lehet minden Egyesült Államokbeli és kanadai egyetemi és főiskolai hallgató, aki még nem szerezte meg a diplomáját, de minden diák összesen csak négy alkalommal vehet részt ezen a versenyen.

Érdekes a verseny lebonyolításának rendje: Három fős csapatok indulnak, de minden versenyző egyénileg írja a dolgozatát. Két részből áll a verseny, mindkettő három órás, közötte két óra szünettel. Minden városban egyszerre kell megírni, ezért a kontinens időeltolódásait is figyelembe vevő általános időbeosztást készítettek. A tavaly december 6-án megrendezett Putnam versenyen Magyarországon tanuló amerikai diákok is résztvettek a szigorú szabályoknak megfelelően.

A legutóbbi tíz évben a Harvard és a Duke Egyetem csapatai felváltva nyertek. A tavalyi versenyen az első öt helyzett a Harvard, a Duke, a Princeton, a Massachusetts és a Washington egyetem volt. Az első helyezett csapat díja 25 000 dollár és minden csapattag külön 1000 dollárt kap.

A múlt évi versenyen egy Amerikában tanuló magyar diák, a KöMaL matematika és fizika pontversenyeiből már jól ismert Katz Sándor dicséretben részesült.

Az 58. William Lowell Putnam matematikaverseny feladatai, 1997. december 6.

A1. A $HOMF$ téglalapban $HO = 11$ egység, $OM = 5$ egység. Egy ABC háromszögben a magasságvonalak metszéspontja a H, a körülírt körének középpontja az O, a BC szakasz felezőpontja az M, az A-ból húzott magasság talppontja az F. Milyen hosszú a BC szakasz?

A2. Egy kerek asztal körül n játékos ül, mindegyiknek van 1 pénzérméje. Az első játékos átad 1 pénzérmét a második játékosnak, aki ezután átad 2 érmét a harmadiknak. A harmadik játékos ismét 1 érmét ad a negyediknek, aki megint 2-t ad az ötödiknek. És így tovább, a játékosok felváltva 1 vagy 2 érmét adnak át a következő olyan játékosnak, akinek még van pénze. Akinek elfogy a pénze, az kiesik a játékból. Keressünk végtelen sok olyan n számot, amelyre valamelyik játékos birtokába kerül mind az n pénzdarab.

A3. Számítsuk ki az integrál értékét:

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \dots\right)\cdot\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \dots\right)\mathrm{d}x.$$

A4. Legyen G egy csoport, e az egységeleme, és $\varphi : G \to G$ olyan függvény, amelyre

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_3) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)\varphi(h_3)$$

teljesül, valahányszor $g_1g_2g_3 = e = h_1h_2h_3$. Bizonyítsuk be, hogy létezik G-nek egy olyan a eleme, amelyre a $\psi(x) = a\varphi(x)$ leképezés homomorfizmus. (Azaz $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ minden x, $y \in G$-re.)

A5. Jelölje N_n az olyan $(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$ pozitív egész rendezett n-esek számát, amelyekre $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$. Határozzuk meg, hogy N_{10} páros-e vagy páratlan.

A6. A pozitív egész n és tetszőleges c valós számra definiáljuk x_k-t a következő rekurzióval: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, és minden $k \ge 0$-ra

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}.$$

Rögzítsük az n-et, és tekintsük azt a legnagyobb c értéket, amelyre $x_{n+1} = 0$. Adjuk meg x_k-t n és k függvényében $(1 \le k \le n)$.

B1. Jelölje $\{x\}$ az x valós számnak a legközelebbi egész számtól való távolságát. Tetszőleges pozitív egész n-re határozzuk meg az

$$S_n = \sum_{m=1}^{6n-1} \min\left(\left\{\frac{m}{6n}\right\},\ \left\{\frac{m}{3n}\right\}\right)$$

értéket. ($\min(a,\ b)$ jelöli az a és b minimumát.)

B2. Legyen f egy kétszer differenciálható valós értékű függvény, amelyre teljesül az

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x)$$

egyenlőség, ahol $g(x) \geq 0$ minden valós x-re. Bizonyítsuk be, hogy $|f(x)|$ korlátos.

B3. Tetszőleges pozitív egész n-re írjuk fel a $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ összeget $\dfrac{p_n}{q_n}$ alakban, ahol p_n és q_n relatív prím pozitív egészek. Határozzuk meg az összes olyan n-et, amelyre a q_n nem osztható 5-tel.

B4. Jelölje az $(1+x+x^2)^m$ hatványban az x^n együtthatóit $a_{m,n}$. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 0$ esetén

$$0 \leq \sum_{i=0}^{\lfloor 2k/3 \rfloor} (-1)^i a_{k-i,i} \leq 1.$$

B5. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 2$-re

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n \equiv \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n-1 \pmod{n}.$$

B6.

Egy háromszög feldarabolásakor képezzük az összes olyan pontpár távolságát, amelyek ugyanazon részbe esnek. A kapott távolságok halmazának legkisebb felső korlátját nevezzük a feldarabolás *átmérőjének*.

A 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszög ábra szerinti feldarabolásában például az „átmérő” 5/2.

Mennyi a lehető legkisebb „átmérő”, amelyet e háromszög 4 részre darabolásával kaphatunk?