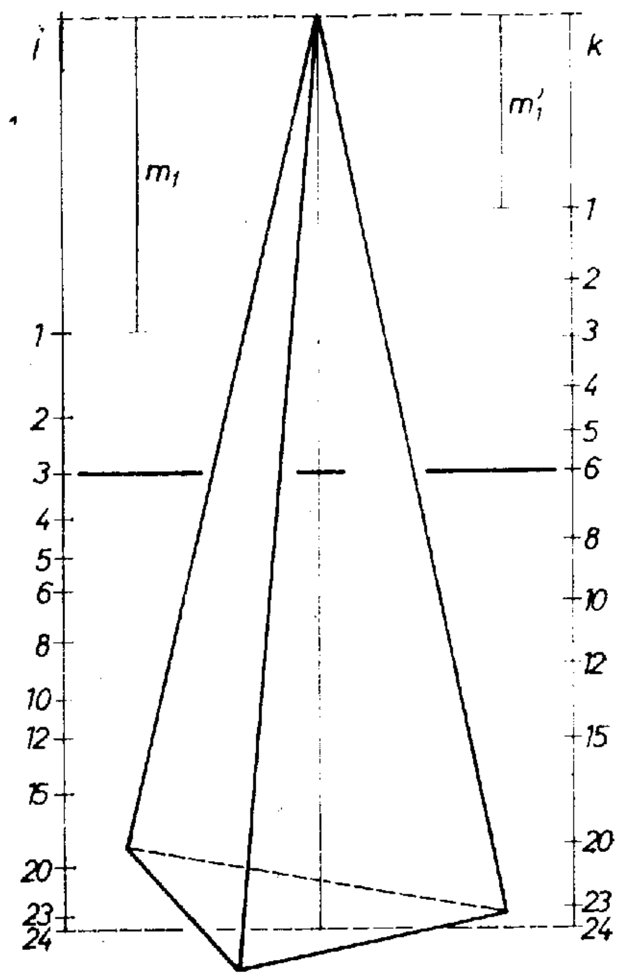
1. A csonkagúlák helyett az eredeti gúla csúcsa és az alapjával párhuzamos síkok által meghatározott gúlákat vizsgáljuk. A síkoknak a közös csúcstól mért távolságai legyenek $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{24}$ ($m_{24} = m$, az eredeti gúla magassága). Ha az eredeti gúla térfogata V, akkor az m_i magasságú gúláé a felosztás szerint $V_i = \dfrac{i}{24}V$, tehát $V_i/V = i/24,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 23$.



A gúlák megfelelő lapjait alkotó háromszögek, ill. az alapsokszögek hasonlóak, a megfelelő élek aránya m_i/m, ezért $V_i/V = m_i^3/m^3$. A két egyenlőségből következik, hogy

$$m_i = m\sqrt[3]{\frac{i}{24}}.$$

A második felosztás esetén az m_k' magasságú gúla palástfelszíne $F_k = \dfrac{k}{24}F$, ahol F az eredeti gúla palástfelszíne, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 23$, így $F_k/F = k/24$. A hasonlóság alapján $F_k/F = m_k'^2/m^2$, amiből $m_k' = m\sqrt{\dfrac{k}{24}}$.

A két síkhalmaznak akkor van közös síkja, ha valamilyen i, k számpárra teljesül, hogy $m_i = m_k'$. Ez azt jelenti, hogy

$$\sqrt[3]{\frac{i}{24}} = \sqrt{\frac{k}{24}}, \qquad \text{azaz} \qquad 24\,i^2 = k^3.$$

Mivel $24 = 3\cdot 2^3$, azért az $i = 3,\ k = 6$ számpárra teljesül a feltétel: az első felosztás harmadik síkja egybeesik a második felosztás hatodik síkjával. Ez a sík félmagasságban vágja ketté a gúlát, fölötte van a V térfogat $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{3}{24}$-ed része és az F palást felszín $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{6}{24}$-ed része.

2. Ha a gúlát n síkkal osztjuk a két elv szerint részekre, akkor az előzőekhez hasonlóan feltételként az

$$(n+1)i^2 = k^3, \qquad 1 \le i, \quad k \le n$$

egyenletre jutunk. Amely $(n+1)$ értékekre van megoldás, a kétféle n-elemű síkhalmaznak van közös síkja.

Ha mármost $(n+1)$ törzstényezős felbontásban nem fordul elő harmadik vagy annál magasabb hatvány, akkor az egyenletnek nincs megoldása az $1 \leq i, \ k \leq \leq n$ követelmény mellett. Ekkor ugyanis $(n+1)$ felbontásban minden előforduló prímszám kitevője vagy $\alpha = 1$, vagy $\alpha = 2$, és ezt i^2-nek kell (k^3 céljára) 3-ra vagy 3 valamely többszörösére emelnie, $\alpha = 1$-ről legalább 3-ra, $\alpha = 2$-ről pedig legalább 6-ra, hiszen i^2-ben páros a kitevő. Így i-nek tartalmaznia kell $(n+1)$-nek minden prímtényezőjét legalább akkora kitevővel, mint maga $(n+1)$, ami csak $i \geq n+1$ mellett lenne lehetséges.

Ha viszont $n+1 = q \cdot p^3$, ahol $p > 1$ és q természetes számok, akkor pl. az $i = q, \ k = q \cdot p$ számpár minden $q = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots$ mellett megoldása az egyenletnek. A 100 alatti köbszámok $8, \ 27, \ 64$, ezért a megfelelő n értékek:

$$7, \ 15, \ 23, \ 26, \ 31, \ 39, \ 47, \ 53, \ 55, \ 63, \ 71, \ 79, \ 80, \ 87, \ 95.$$

Már itt észrevesszük, hogy az $n = 63$-at kétféleképpen is megkaptuk: $63 = = 8 \cdot 2^3 - 1 = 1 \cdot 4^3 - 1$, tehát itt két közös síkot kapunk: $i = 8, \ k = 16$ és $i = 1, \ k = 4$.

Baksai Róbert (Győr, Révai M. Gimn. IV. o. t.)