Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete* és Sain Márton *Nincsen királyi út* című könyvében is megtalálható Arkhimédész gyönyörű gondolatmenete a parabolaszelet területének meghatározásáról: Arkhimédész be akarta bizonyítani, hogy egy „parabola szegment” területe egyenlő a beírt háromszög területének 4/3-adszorosával. Ehhez a parabola néhány tulajdonságának ismeretére volt szüksége. A fenti művekben néhány tétel igazolásánál koordináta-geometriai levezetések szerepelnek. Ebben a cikkben a párhuzamos szelők tételének és háromszögek hasonlóságának segítségével fogjuk az egyik tételt belátni. Közben a parabola (és a többi másodrendű görbe) elemi tulajdonságainak bizonyításához alkalmas módszert is láthatunk.

Tudjuk, hogy a parabola a sík azon pontjainak halmaza, amelyek a sík egy egyenesétől, a vezéregyenestől (v) és egy – nem az egyenesen lévő – pontjától, a fókusztól (F) egyenlő távolságra vannak.

Fogalmazzuk át a fenti definíciót: *Parabola azon körök középpontjainak halmaza, amely körök átmennek a fókuszon és érintik a vezéregyenest.*

Az *1. ábrán* az A és a B az F fókuszú, v vezéregyenesű parabola pontjai. A definícióból rögtön kitűnik, hogy a parabola szimmetrikus az F-en átmenő, a v-re merőleges t egyenesre (tengely).

Ennek ismeretében tudunk parabolapontot szerkeszteni: Felveszünk a vezéregyenesen egy A' pontot, ezen át párhuzamost húzunk t-vel, majd ezt az $\overline{A'F}$ felezőmerőlegesével (a) messük el, az így kapott A pont pontja a parabolának.

Lássuk be, hogy a-nak csak egy közös pontja van a parabolával.

Legyen $P \in a$, $P \neq A$. Ekkor $\overline{PF} = \overline{PA'}$, és ez nagyobb, mint P-nek a v-től való távolsága. Azt is beláttuk itt, hogy az a összes pontja, A-t kivéve, távolabb van F-től, mint v-től, azaz *külső pont* (*1. ábra*).

Azt sem nehéz megmutatni, hogy az A-n átmenő összes egyenes közül egyedül az a-nak van meg a fenti tulajdonsága. Joggal nevezzük a-t a parabola A-beli érintőjének. (Vegyünk egy, az A-n átmenő, a-tól különböző, v-re nem merőleges e egyenest, tükrözzük erre F-et: képe F', majd az F'-n átmenő, t-vel párhuzamos egyenesnek és e-nek a metszéspontjáról lássuk be, hogy közelebb van F-hez, mint v-hez, azaz *belső pont.* Ha viszont e merőleges v-re, akkor az A „fölötti” pontok lesznek a parabola belső pontjai.)

Igaz tehát a következő **1. állítás:** *A vezéregyenes bármely pontját a fókusszal összekötő szakasz felező merőlegese a parabola érintője annak a pont „fölötti” pontjában.*

Két érintő metszéspontja (az *1. ábrán* M) viszont éppen $A'B'$ felező merőlegesén van rajta, hiszen az $A'B'F$ háromszögben M két oldal felező merőlegesének metszéspontja. Ezért igaz az alábbi:

2. állítás. *A parabola két pontját (A-t és B-t) összekötő szakasz felezőpontja és a pontokban húzott érintők metszéspontja egy, a t-vel párhuzamos egyenest határoz meg.*

Az Arkimédész által kimondott tétel (ld. Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete c. könyv 75–78. oldalán) a következő:

Tétel. *„Húzzuk meg a parabola egy tetszés szerinti abszcisszájához tartozó ordinátát” (2. ábra: most a parabola tengelye az y tengely). Ennek talppontja D, metszéspontja a parabolával E. a B ponthoz tartozó érintővel G. Bárhol is vettük fel a D pontot, érvényes a következő:*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{DG}{DE}.$$

Ezt fogjuk bizonyítani a parabola tetszőleges AB húrján levő D pontra.

Bizonyítás.

A *3. ábrán* AB a parabola húrja, ezen van a D pont. Az A, B, E parabolapontokhoz húzott érintők a, b és e. A 2. állítás szerint az A-ban és B-ben húzott érintők K metszéspotja és az AB szakasz K^* felezőpontja egy, a tengellyel párhuzamos a' egyenest határoz meg. Hasonlóan az AE szakasz felezőpontja és az a és e érintők metszéspontja, M a tengellyel párhuzamos e' egyenest határozza meg. A BG szakasz felezőpontja és a b és e érintők L metszéspontja a tengellyel párhuzamos b' egyenest határozza meg, ennek AB-vel való metszéspontja L^*.

Előbb belátjuk, hogy DP párhuzamos AE-vel, ahol P a B-n átmenő, tengellyel párhuzamos egyenesnek az e érintővel való metszéspontja.

$$\frac{BD}{BA} = \left(\frac{BD}{2} : \frac{BA}{2}\right) = \frac{BL^*}{BK^*} = \frac{BL}{BK}$$

(a párhuzamos szelők tétele szerint), amiért $a = AK \parallel DL$.

Így az AMR és DLE párhuzamos állású háromszögek, ahol R az e érintő és az A-n keresztül a R tengellyel párhuzamosan húzott egyenes metszéspontja. Mivel az RE szakasz felezőpontja M, az EP felezőpontja az L, így az ARE és DEP háromszögek is hasonlók. Tehát valóban $AE \parallel DP$.

Használjuk ki, hogy $PQ = DE$, ahol Q az AE és BP egyenesek metszéspontja, és $EG = PB$ miatt $DG = BQ$.

A párhuzamos szelők tételéből következik, hogy

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BQ}{PQ},$$

és a fenti egyenlőségek miatt ez utóbbi egyenlő $\dfrac{DG}{DE}$-vel, tehát $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{DG}{DE}$, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Láthatunk most egy olyan feladatot, amely igen egyszerű, és látszólag semmi köze a fentiekhez:

Az O középpontú λ arányú, O^λ=val jelölt középpontos hasonlóságnál az $ABCD$ paralelogramma képe az $A'B'C'D'$. A paralelorgamma átlinak metszéspontja K, a K képe a K', azaz $K' = O^\lambda(K)$. Legyen az O tükörképe a K-ra a P és a K'-re a P'. Ekkor igaz, hogy $P' = O^\lambda(P)$, és például $PD \parallel BB'$, illetve $C'P \parallel AA'$, valamint PP' átmegy K-n, O-n és O'-n.

Mi köze ennek a fenti parabolás feladathoz?

Bohner Géza, tanár
Kossuth L. Gimn., Cegléd