1. Az egyenlet mindkét oldalát $100 = 2^2 \cdot 5^2$-nel osztva:

$$5^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{1-x}} = 1, \qquad \left(5 \cdot 2^{\frac{1}{1-x}}\right)^{x-2} = 1.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x-2=0$ vagy $5 \cdot 2^{\frac{1}{1-x}} = 1$. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = \log_5 10$.

2. A feltétel és a koszinusztétel alkalmazásával

$$-\frac{b}{a} = -2\cos\gamma \quad \text{és} \quad -2\cos\gamma = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab},$$

ahonnan

$$\frac{c^2-a^2-b^2}{ab} = -\frac{b}{a}$$
$$c^2 = a^2,$$

így $c = a$ ($c > 0$, $a > 0$), a háromszög egyenlő szárú.

(Az igazolás szinusztétel alkalmazásával is elvégezhető, $\alpha = \gamma$ adódik. A $b = 2a\cos\gamma$ feltétellel belátható, hogy a b oldalhoz tartozó magasságvonal a háromszög szimmetriatengelye.)

3. Nyilván $x \geq -4$ és $x \neq 0$. Ezek a számok egyben az egyenlőtlenség megoldásai, mert ha a törtet $\left(2+\sqrt{x+4}\right)^2$-nel bővítjük, akkor

$$\left(2+\sqrt{x+4}\right)^2 > x+6, \qquad \text{azaz a} 2 + 4\sqrt{x+4} > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami minden megengedett x-re teljesül.

($\sqrt{x+4}$ helyett bevezethetünk új változót.)

4. Mindkét tört számlálója pozitív állandó és a nevezők is pozitívak, így akkor veszik fel a legnagyobb értéküket, ha a nevezőjük a lehető legkisebb.

a) Ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan $A = B$ esetén teljesül. Mivel 2^{x-1} és $2^{2-x} > 0$,

$$2^{x-1} + x^{2-x} + 1 \geq 2\sqrt{2^{x-1} \cdot 2^{2-x}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1.$$

és csak akkor lesz egyenlőség, ha $2^{x-1} = 2^{2-x}$ tehát, ha $x = \dfrac{3}{2}$. Az adott kifejezés legnagyobb helyettesítési értéke $\dfrac{4\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+1} = 2$, amit az $x = \dfrac{3}{2}$ helyen vesz fel.

b) Tudjuk, hogy $A^2+B^2 \geq 0$, ahol az egyenlőség pontosan $A = 0$ és $B = 0$ esetén teljesül. $(3-x+\lg 2y)^2+(x^2-1)^2+16 \geq 16$. Az egyenlőség akkor teljesül, ha $x^2 - 1 = 0$ és $3 - x + \lg 2y = 0$, azaz ha $x_1 = 1$, $y_1 = 0,005$ vagy $x_2 = -1$, $y_2 = 0,00005$. Az adott kifejezés legnagyobb értéke $\dfrac{32}{16} = 2$, amit az $(x_1; y_1)$ és az $(x_2; y_2)$ számpárok esetén vesz fel.

5. A feltételek szerint $S_{n+3} - S_n = \dfrac{126-75}{2}$, tehát $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = \dfrac{51}{2}$, azaz

$$\left(a_1 + n \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(a_1 + (n+1) \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(a_1 + (n+2) \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{51}{2},$$

amiből

$$2a_1 + n = 16. \tag{1}$$

Mivel $\dfrac{75}{2} = \dfrac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1) \cdot \dfrac{1}{2}\right)$, azért

$$n(4a_1 + n - 1) = 150. \tag{2}$$

Az (1) és a (2) egyenletek által alkotott egyenletrendszer megoldása során az $n^2 - 31n + 150 = 0$ egyenletet kapjuk. Így ha $n = 6$, akkor $a_1 = 5$, és ha $n = 25$, akkor $a_1 = -\dfrac{9}{2}$.

6. A második egyenletből $x = y + z - 3$, így $(y+z-3)^2 - y^2 - z^2 = 1$, azaz $yz - 3y - 3z = -4$, ami szorzattá alakítással

$$y(z-3) - 3(z-3) - 9 = -4, \qquad (y-3)(z-3) = 5$$

alakban írható. Az egész számok körében $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$, azaz $y - 3 = 1$, $z - 3 = 5$ vagy $y - 3 = 5$, $z - 3 = 1$ vagy $y - 3 = -1$, $z - 3 = -5$ vagy $y - 3 = -5$, $z - 3 = -1$. Az egyenletet a következő egész számokat tartalmazó $(x,\ y,\ z)$ számhármasok elégítik ki:

$$(9;\ 4;\ 8), \qquad (9;\ 8;\ 4), \qquad (-3;\ 2;\ -2), \qquad (-3;\ -2;\ 2).$$

7. Az adott körnek két $x_0 = 11$ abszcisszájú pontja van, $E_1(11; -9)$ és $E_2(11; -25)$. Az E_1 pontban az adott kört és az x tengelyt érintő körök közös érintőjének az egyenlete $3x - 4y = 69$. (Egy normálvektora az $\frac{1}{2}\overrightarrow{E_1C}(3; -4)$, ahol $C(17; -17)$ az adott kör középpontja.)

A $3x - 4y = 69$ egyenletű érintő az x tengelyt az $M(23; 0)$ pontban metszi. A feltételeknek két kör felel meg, ezek az x tengelyt olyan F_1, illetve F_2 pontban érintik, amelyekre $ME_1 = MF_1 = MF_2$, hiszen a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. Mivel $ME_1 = 15$, azért $F_1(8; 0)$ és $F_2(38; 0)$. A keresett körök középpontja rajta van az E_1C egyenesen, amelynek egyenlete: $4x + 3y = 17$, és az $x = 8$, illetve $x = 38$ egyenletű egyeneseken. A keresett körök egyenlete:

$$(x - 8)^2 + (y + 5)^2 = 5^2, \qquad \text{illetve} \qquad (x - 38)^2 + (y + 45)^2 = 45^2.$$

Az $E_2(11; -25)$ ponthoz tartozó érintőkörök egyenlete:

$$(x + 64)^2 + (y + 125)^2 = 125^2, \qquad \text{illetve} \qquad \left(x - \frac{58}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{125}{9}\right)^2 = \left(\frac{125}{9}\right)^2.$$

A feladat más módon is megoldható. Hogyan?

8. A feladatban szereplő egyenlet: $x^4 + 2(m^2 - 5)x^2 + m^4 - 10m^2 + 7 = 0$. Az adott, x^2-re másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 72 = (6\sqrt{2})^2$, így

a) $x^2 = (5 + 3\sqrt{2}) - m^2$ vagy b) $x^2 = (5 - 3\sqrt{2}) - m^2$.

a) Az $x^2 = 5 + 3\sqrt{2} - m^2$ egyenletnek két különböző x_1 és x_2 megoldása van, ha $5 + 3\sqrt{2} - m^2 > 0$, azaz ha $-\sqrt{5 + 3\sqrt{2}} < m < \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$, egy (két egyenlő) megoldása van, az $x_0 = 0$, ha $m = \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$ vagy $m = -\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$, nincs megoldása, ha $m > \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$ vagy $m < -\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$.

b) Az $x^2 = (5 - 3\sqrt{2}) - m^2$ egyenletnek két különböző x_3 és x_4 megoldása van, ha $-\sqrt{5 - 3\sqrt{2}} < m < \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$, egy (két egyenlő) megoldása van, az $x_0 = 0$, ha $m = \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$ vagy $m = -\sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$, nincs megoldása, ha $m > \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$ vagy $m < -\sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$.

Összefoglalva:

Az egyenletnek négy különböző megoldása van, ha $-\sqrt{5 - 3\sqrt{2}} < m < \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$,
három különböző megoldása van, ha $m = -\sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$ vagy $m = \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$,
két különböző megoldása van, ha $-\sqrt{5 + 3\sqrt{2}} < m < -\sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$ vagy $\sqrt{5 - 3\sqrt{2}} < m < \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$,
egy (kettős) megoldása van, ha $m = -\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$ vagy $m = \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$,
az egyenletnek nincs megoldása, ha $m < -\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$ vagy $m > \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$.

Rábai Imre