1. Ismeretes, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$. Ezt alkalmazva

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b, \qquad \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c \quad \text{és} \quad \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

Így

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq \frac{1}{2}(2b + 2c + 2a) = a + b + c.$$

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

2. a) Az állítás teljes indukcióval igazolható. Ha $n = 1$, akkor igaz az állítás, mert $S_1 = 1 \cdot 2 = 10 + (3 - 5) \cdot 2^2 = 2$. Tegyük fel, hogy n-re igaz, azaz $S_n = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}$. Be kell látnunk, hogy $(n + 1)$-re is igaz, azaz hogy

$$S_{n+1} = 10 + (3(n + 1) - 5) \cdot 2^{n+2} = 10 + (6n - 4) \cdot 2^{n+1}.$$

Ez is fennáll, hiszen

$$S_{n+1} = S_n + (3(n + 1) - 2) \cdot 2^{n+1} = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1} + (3(n + 1) - 2) \cdot 2^{n+1} = 10 + (6n - 4) \cdot 2^{n+1}.$$

Így az állítást igazoltuk.

b) Észrevehető, hogy S'_n k-adik tagja 2^k-nal nagyobb az S_n k-adik tagjánál. Ezért

$$S'_n = S_n + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) = S_n + 2(2^n - 1) = 8 + (3n - 4) \cdot 2^{n+1}.$$

3. a) Ismeretes, hogy a háromszög területe $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ és $c = 2r\sin\gamma$, tehát $T = \frac{abc}{4r}$, azaz $r = \frac{abc}{4T}$.

Mivel $\varrho = \frac{T}{s}$, ahol $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, azért ha $ac = 6r\varrho$, akkor $ac = 6 \cdot \frac{abc}{4T} \cdot \frac{T}{s} = \frac{3abc}{a + b + c}$, amiből $a + b + c = 3b$, $a + c = 2b$, $a - b = b - c$, azaz a, b, c valóban egy számtani sorozat három szomszédos eleme.

b) Legyen a, b, c egy számtani sorozat három szomszédos eleme. Ekkor $a + c = 2b$, ezért

$$6r\varrho = 6 \cdot \frac{abc}{2T} \cdot \frac{2T}{a + b + c} = 3\frac{abc}{3b} = ac.$$

4. a) Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$. Világos, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \mathbf{ac} + \mathbf{b}(-\mathbf{d}) + (\mathbf{c} + \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) =$$
$$\mathbf{ac} - \mathbf{bd} + \mathbf{bc} + \mathbf{c}^2 + \mathbf{bd} + \mathbf{cd} = \mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = 0.$$

b) A feltétel szerint $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$, ezért skaláris szorzatuk nulla, azaz $\mathbf{ac} = 0$, és hasonlóan $(-\mathbf{d})\mathbf{b} = 0$.

Azt kell belátni, hogy $CA \perp BD$. Mivel $\overrightarrow{CA} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ és $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, ezért elegendő belátni, hogy $(\mathbf{c} + \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = 0$. Ez pedig teljesül, mert

$$(\mathbf{c} + \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{cb} + \mathbf{c}^2 + \mathbf{db} + \mathbf{dc} = \mathbf{c}(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{c}(-\mathbf{a}) = 0,$$

hiszen $\mathbf{db} = 0$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = -\mathbf{a}$ és $\mathbf{ca} = 0$.

c) A b) feltétele szerint, ha a D pont rajta van a C-ből és az A-ból induló magasságvonalon, akkor a bizonyított állítás szerint rajta van a B-ből induló magasságvonalon is, tehát az ABC háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

Rábai Imre