1. A szinusztétel szerint $a\sin\beta = b\sin\alpha$, $a\sin\gamma = c\sin\alpha$ és $b\sin\gamma = c\sin\beta$, így igaz az állítás.

2. Az egyenlet $\cos\pi(x-1)^2 = \cos\pi(x^2+1)$ alakban írható, hiszen $-\cos\alpha = \cos(\alpha+\pi)$. Ez akkor teljesül, ha

$$\pi(x-1)^2 + 2k\pi = \pi(x^2+1) \qquad \text{vagy} \qquad \pi(x-1)^2 + 2n\pi = -\pi(x^2+1), \qquad (k,\ n \in \mathbf{Z}),$$

azaz $x = k$ vagy $x^2 - x + 1 + n = 0$.

Az első esetben a legkisebb pozitív gyök az 1, a legkisebb abszolút értékű negatív gyök a -1; a második esetben $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-4n-3}}{2}$, a legkisebb pozitív gyök a 1, a legkisebb abszolút értékű negatív gyök az $\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$; így $x_1 = 1$, illetve $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ a kérdéses gyökök.

3. Az egyenlet

$$\left|\sqrt{x+2}+1\right| + \left|\sqrt{x+2}-1\right| = a$$

alakba írható, hiszen a gyökjel alatt $\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$, illetve $\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2$ van. $|\sqrt{x+2}+1| = \sqrt{x+2}+1$, mivel $\sqrt{x+2}+1 > 0$. Az egyenletnek csak olyan megoldása lehet, amelyre $x \geq -2$.

Ha $\sqrt{x+2} > 1$, azaz $x > -1$, akkor az egyenlet $2\sqrt{x+2} = a$ alakú;
ha $0 \leq \sqrt{x+2} \leq 1$, azaz $-2 \leq x \leq -1$, akkor az egyenlet $2 = a$ alakú.
Ha $a = 1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása;
ha $a = 2$, akkor a $-2 \leq x \leq -1$ számok a megoldások;
ha $a = 4$, akkor a megoldás $x = 2$;
ha $a = 2\sqrt{x+2}$, akkor az $x \geq -1$ számok a megoldások.

4. A huszonnegyedik hónap végére

$$T = 5000 \cdot 1,02\frac{1,02^{24}-1}{1,02-1} \approx 155\ 151$$

forint gyűlik össze. Ha ekkor és a továbbiakban is x forintot veszünk ki minden év végén a harminchatodik hónap végéig, és akkor már a bankban nem marad pénz, akkor

$$0 = T \cdot 1,02^{12} - x \cdot \frac{1,02^{13}-1}{1,02-1}, x = \frac{T \cdot 1,02^{12}}{1,02^{13}-1} \cdot (1,02-1), \text{ahonnan} x = 5000 \cdot 1,02^{13} \cdot \frac{1,02^{24}-1}{1,02-1} \cdot \frac{1,02-1}{1,02^{13}-1}, \text{azaz} x = 5000 \cdot 1,0$$

A második év végén, a kivét után 141 747 forintunk lesz a bankban.

5. A feltétel szerint $2b > a$ és $ab = 1$, így az igazolandó egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$\frac{a^2+4b^2-4ab+4ab}{2b-a} \geq 4.$$

Tudjuk, hogy ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

$$\frac{a^2+4b^2-4ab+4ab}{2b-a} = \frac{(2b-a)^2+4}{2b-a} = 2b - a + \frac{4}{2b-a} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

6. Legyen az e egyenes egy pontja $x = u$, $y = -u-1$, az f egyenes egy pontja $x = 3t$, $y = -8t + \dfrac{7}{3}$. A feltétel szerint a $P(1;1)$ pont az EF szakaszt $\left(E(u;-u-1); F\left(3t; -8t+\dfrac{7}{3}\right)\right)$ $3:2$ arányban osztja, tehát $5 = 9t + 2u$ és $5 = -24t + 7 - 2u - 2$, ahonnan $u = 4$ $(t = -\dfrac{1}{3})$, tehát $E(4;-5)$, $F(-1;5)$. A keresett EP egyenes egyenlete: $2x + y = 3$.

(A P centrumú középpontos hasonlósággal is dolgozhatunk.)

7. Legyen az $x^2 - px + q = 0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2, az $x^2 + (p+4)x - 3q = 0$ egyenlet két gyöke $3x_1$ és x_3. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint

(1)

$x_1 + x_2$

$=$

p

(3)

$3x_1 + x_3$

$=$

$-p-4$

és

(2)

x_1x_2

$=$

$q,$

(4)

$3x_1x_3$

$=$

$-3q,$

és

(5)

p^2-4q

$=$

$9.$

Az (1) egyenlet 3-szorosából vonjuk ki a (3) egyenletet, majd a (2) háromszorosához adjuk hozzá (4)-et. Ekkor

$$3x_2 - x_3 = 4p+4 \qquad \text{és} \qquad 3x_1(x_2+x_3) = 0.$$

Ha $x_1 = 0$, akkor $q = 0$, $p^2 = 9$, tehát a $q = 0$, $p = 3$ és a $q = 0$, $p = -3$ számpárok megfelelnek.

Ha $x_2+x_3 = 0$, akkor $4x_2 = 4p+4$, $x_2 = p+1$, ami kielégíti az $x^2-px+q = 0$ egyenletet, azaz $(p+1)^2-p(p+1)+q = 0$, tehát $q = -p-1$. Ehhez véve az (5) egyenletet: $p^2+4p-5 = 0$.

Ha $p = 1$, akkor $q = -2$, ha $p = -5$, akkor $q = 4$. Mind a négy $(p;q)$ számpár megoldás.

(Ha az $x^2-px+q = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor az $x^2-3px+9q = 0$ egyenlet gyökei $3x_1$ és $3x_2$, tehát a másik egyenlettel van közös gyöke.

Észrevehető, hogy az $x^2-px+q = 0$ egyenlet diszkriminánsa 5, tehát $x_1 = \frac{1}{2}(p+3)$, $x_2 = \frac{1}{2}(p-3)$. E két megjegyzés alkalmazásával is megoldható a feladat.)

8. Az $xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x^2 - y^2\right)$ azonosság alkalmazásával $xy = \frac{1}{2}\left((2z+1)^2 - (z^2+4x)\right)$, $xy = \frac{1}{2}(3z^2+1)$. A $z \mapsto \frac{1}{2}(3z^2+1)$ függvényt kell vizsgálni azzal a feltétellel, hogy teljesülnek az egyenletek, azaz az $x^2-(2z+1)x+\frac{1}{2}(3z^2+1) = 0$ egyenlet diszkriminánsa nemnegatív.

Most $D = (2z+1)^2 - 2(3z^2+1) = 1-2(z-1)^2$. $D \geq 0$ pontosan akkor, ha $1-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. A vizsgálandó függvény ebben az intervallumban szigorúan monoton növekvő, így a minimumát az $x = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, a maximumát az $x = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ helyen veszi fel. A minimum értéke $\frac{1}{4}(11-6\sqrt{2}) \approx 0,63$, a maximum értéke $\frac{1}{4}(11+6\sqrt{2}) \approx 4,87$.

Rábai Imre