Rédei László professzor úr emlékére4mm

**1.** Igazolja, hogy ha $a$, $b$, $c \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c.$$

**2.** a) Igazolja, hogy

$$S_n = 1\cdot 2+4\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots+(3n-2)\cdot 2^n = 10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}.$$

b) Állítsa elő az

$$S_n' = 2\cdot 2+5\cdot 2^2+8\cdot 2^3+\cdots+(3n-1)\cdot 2^n$$

összeget $n$ függvényeként.

**3.** Igazolja, hogy egy háromszög három oldalának hossza, $a$, $b$ és $c$ pontosan akkor (akkor és csak akkor) három egymást követő eleme egy számtani sorozatnak, ha

$$ac = 6r\varrho,$$

ahol $r$ a háromszög köré, $\varrho$ a háromszögbe írható kör sugara.

**4.** Legyenek $A$, $B$, $C$ és $D$ a sík (tér) tetszőleges pontjai. Igazolja, hogy

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$;

b) ha $AB\perp CD$ és $AD\perp BC$, akkor $CA\perp BD$.

c) Legyen $ABC$ egy síkbeli háromszög. A b) alapján indokolja, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.