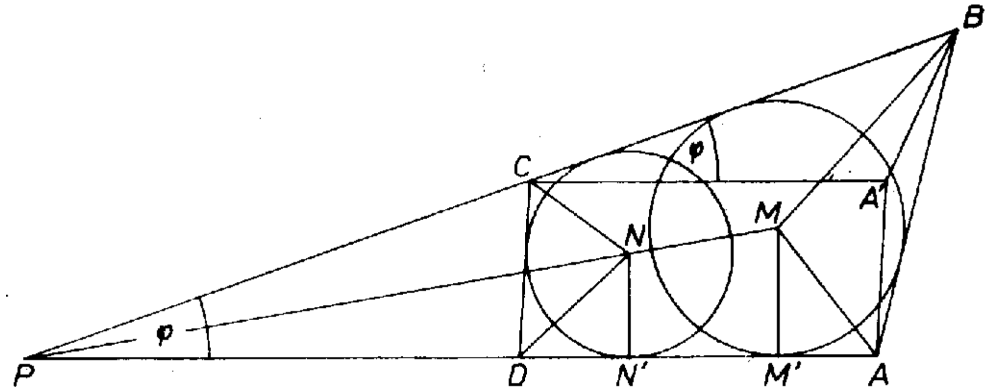
1. Jelöljük a φ szög csúcsát P-vel, és a számpélda $AB = 2\cdot CD$ összefüggésére gondolva, válasszuk úgy a betűzést, hogy $PD < PA$ legyen, így a konvexség alapján $PC < PB$ is teljesül. (Lényegében azonos a meggondolás a $PD > PA$ kiindulásból is.) Eszerint a PDC háromszög benne van a PAB háromszögben, a szögfelezőkre tekintettel M a PAB háromszögbe beírt kör középpontja, N pedig a PDC háromszög DC oldalához hozzáírt külső érintő kör középpontja, tehát mindkettő rajta van a háromszögek közös P csúcsánál levő szög felezőjén, és $MN = |PM - PN|$.



Jelöljük M-nek és N-nek a közös PA oldalegyenesen levő vetületét, az említett körök érintési pontját M'-vel, ill. N'-vel, ekkor

$$MN = \frac{M'N'}{\cos\varphi/2} = \frac{|PM' - PN'|}{\cos\varphi/2},$$

és itt – mint az érintési pontokig terjedő oldalszakaszokra ismeretes –

$$PM' = \frac{1}{2}(PA + PB - AB) = \frac{1}{2}(PD + DA + PC + CB - AB),$$
$$PN' = \frac{1}{2}(PD + PC + CD),$$

ennélfogva

$$MN = \frac{1}{2\cos\dfrac{\varphi}{2}}\cdot |(DA + CB) - (AB - CD)|.$$

Eredményünknek az a speciális esete, amikor M és N egybeesik, $MN = 0$, vagyis egyenlő távolságra vannak az $ABCD$ négyszög mindegyik oldalától éppen azonos az $ABCD$-be beírt kör létezésének ismert szükséges feltételével (ami – mint sokan tudják – egyszersmind elegendő feltétel is).

2. A számpéldában először azt az esetet vesszük, ha φ hegyesszög, vagyis

$$\cos\varphi = +0{,}96;\ \text{ekkor}\ \cos\frac{\varphi}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = +\frac{1{,}4}{\sqrt{2}},$$

és

$$MN = \frac{\sqrt{2}}{2{,}8}|75 + 100 - 70 - 35| = 25\sqrt{2} \approx 35\ \text{egység}.$$

Ha viszont φ-t tompaszögnek próbáljuk venni:

$$\cos\varphi = -0{,}96, \quad \text{akkor} \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{0{,}2}{\sqrt{2}},$$

ebből $MN = 175\sqrt{2} \approx 247{,}5$ adódik, és ez lehetetlen, hiszen négyszögünk AC átlója kisebb, mint az $AD + DC = 110$ és az $AB + BC = 170$ összegek kisebbike, azaz mint 110, és a BD átló kisebb, mint $DA + AB = 145$ és $BC + CD = 135$ kisebbike, 135, tehát négyszögünk nem tartalmazhat 110 és 135 nagyobbikánál hosszabb szakaszt.

Megjegyzés. Csekély többletszámítással az is adódik, hogy négyszögünk trapéz, a CD oldal a PAB háromszögnek BA-val párhuzamos középvonala. Eljuthatunk erre úgy, hogy azt az eljárást követjük számítással, ahogyan adatainkból és a $0° < \varphi < 90°$ mellékfeltevésből az $ABCD$ négyszöget szerkesztenénk (DA eltolása a CA' helyzetbe, BCA' háromszög, $BA'A$ háromszög az oldalaiból, és $A'C$ eltolása AD-be; ezúttal $BA' + A'A = BA$-nak adódik). A PAB háromszög hasonló a 2028. feladatban vizsgált háromszöghöz (KÖMAL 53. köt. (1976) 123. old.).