1999. október 15-én rendezte meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat hagyományos őszi tanulóversenyét, az Eötvös-versenyt, melyen 156 hazai, 3 szlovákiai és 1 romániai versenyző indult. Az első feladatot 15 versenyző tudta hibátlanul megoldani, a másodikat 40, a harmadikra azonban csupán egy tökéletes megoldás érkezett. Részben jó megoldás elég sok volt.

Ismertetjük a feladatokat, azok helyes megoldását, végül a verseny végeredményét.

1. Egy szuperszonikus vadászgép 900 m magasan repül el felettünk, vízszintes irányban. 1 km messze van tőlünk, amikor először meghalljuk a hangját. Milyen irányból halljuk a repülőgép hangját akkor, amikor már 2 km messze van tőlünk a gép?

(Radnai Gyula)

Megoldás. Az *1. ábrán* az M megfigyelő fölött elhaladó repülőgépből egyenlő időközönként kibocsátott hanghullámokat ábrázoltuk.

A szuperszonikus repülőgép sebessége nagyobb, mint a hang sebessége a levegőben. Jól látszik, hogy a repülőgép már elhaladt a megfigyelő felett, de a hangja még nem ért el a megfigyelőhöz. Az *1. ábrán* a repülőgép éppen a D pontban van, ez előtt τ idővel volt a C pontban, 2τ idővel előtte a B pontban, 3τ idővel előtte az A pontban. $AB = BC = CD = v\tau$ (v a repülőgép sebessége). Természetesen a közbülső pontokban is bocsát ki hangot a repülőgép, az áttekinthetőség kedvéért ezeket nem tüntettük fel.

Akármekkora τ időközt választhatunk az ábrázolásra, most azonban éppen akkorát választottunk, hogy az *1. ábrán* ábrázolt helyzethez képest pontosan 2τ idő múlva érjen el az M megfigyelőhöz a repülőgép hangja; ezt mutatja a *2. ábra.* Itt a repülőgép már az F pontban van, s a C pontból indult hanghullám éppen M-be ért. (A többi pontból jövő hang még nem érte el M-et.)

Mivel $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{FM}$, a CMF háromszög derékszögű. Ameddig a gép megtette a CF utat, addig a hang a CM távolságot futotta be. (Ábránkon ez az idő 3τ.) Az összes pontból jövő hanghullán eredője az a kúp alakú „fejhullám-felület”, amelynek egyik alkotója a *2. ábrán* az FM egyenes. E kúp fél nyílásszöge az ún. Mach-szög, amelyre

$$\sin\varphi = \frac{c}{v}$$

(c a hangsebesség, $v \geq c$). Ennek az általánosan érvényes összefüggésnek a felhasználásával fogjuk megoldani a feladatot.

Tekintsük a *3. ábrát,* melyen a balról jobbra haladó repülőgép az F pontban van, amikor először jut el a hangja az M pontba. Az ábrából leolvasható, hogy a Mach-szögre (a megadott adatok felhasználásával)

$$\sin\varphi = \frac{0{,}9\text{ km}}{1\text{ km}} = 0,9,$$

ahonnan

$$\varphi = 64{,}16^\circ.$$

Abban a pillanatban, amikor a repülőgép az M megfigyelőtől 2 km távol lévő R pontban van, a megfigyelő azt a hangot hallja, amit a gép egy korábbi időpontban adott ki. Ahol ekkor volt a repülőgép, azt a pontot jelöljük P-vel. Feladatunk tehát az MP irány meghatározása. Kérdezhetjük például azt, hogy ez az irány mekkora szöggel marad le az MR iránytól, vagyis hány fokkal hátrábbról halljuk a hangot, mint ahol látjuk a gépet. Ezt a szöget (melyet a *3. ábrán* μ-vel jelöltünk) az $MPR\,\triangle$-ből a szinusztétel segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin\varrho}{\sin\mu} = \frac{PM}{PR}.$$

Mivel $\sin\varrho = \dfrac{0{,}9\text{ km}}{2\text{ km}} = 0{,}45$ (ahonnan $\varrho = 26{,}74^\circ$), valamint

$$\frac{PM}{PR} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v} = \sin\varphi = 0,9,$$

ezért

$$\sin\mu = \frac{0{,}45}{0{,}9} = \frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad \mu_1 = 30^\circ, \qquad \text{illetve} \qquad \mu_2 = 150^\circ.$$

Meglepőnek tűnhet, hogy a μ szögre két érték is adódott, pedig csak egy hegyesszögre számítottunk. Vajon a tompaszög is megoldása az eredeti fizikai problémának? Bizony az! Már a *2. ábrából* is látszik, hogy ha a repülőgép túlhaladt az F ponton, akkor nemcsak a C pont utáni helyekről (pl. D-ből és E-ből) induló hullámok érik el fokozatosan az M pontot, hanem egyidejűleg azok a hullámok is odaérnek, amelyeket még a C pontba érkezése előtt bocsátott ki a gép (pl. B-ből, A-ból). Egy ilyen helyzetet mutat a *4. ábra,* ahol éppen a B és a D pontok közeléből indult hullámok érik el egyszerre M-et. (A C-ből indult hullám már túlhaladt M-en). Az első „hangrobbanás” után tehát mindig két irányból halljuk a repülőgép hangját, igaz, általában az „elölről” jövőt halljuk erősebben.

Megjegyzés. A megoldók a hallott hang MP irányának meghatározásakor általában a vízszintes vagy függőleges iránnyal bezárt szögeket adták meg. A helyes eredmények a vízszintessel bezárt szögekre: $\mu_1 + \varrho = 56{,}74^\circ$, illetve $180^\circ - (\mu_2 + \varrho) = 3{,}26^\circ$; a függőlegessel bezárt szögek pedig: $90^\circ - (\mu_1 + \varrho) = 33{,}26^\circ$ és $\mu_2 + \varrho - 90^\circ = 86{,}74^\circ$.

2. Két egyébként egyforma lombik közül az egyiknek a nyaka egyenes, a másiké lefele görbül, az *5. ábra* szerint. A két lombikba azonos mennyiségű

A) vizet,

B) étert

töltünk, és gondoskodunk róla, hogy mindkét lombikban a folyadék hőmérséklete

az A) esetben 100 °C,

a B) esetben 34,6 °C

legyen. Melyik lombikból fogy el hamarabb a folyadék az egyik, illetve a másik esetben?

(Károlyházy Frigyes)

Megoldás. A megadott 100 °C a víz, 34,6 °C pedig az éter normál nyomás melletti forráspontja. A víz móltömege 18 g/mol, az éter $[(C_2H_5)_2O]$ móltömege 74 g/mol. Igaz, a forráspont környékén egyetlen reális gáz sem viselkedik ideális gázként, az mégis joggal feltételezhető, hogy a vízgőz sűrűsége kisebb, az étergőz sűrűsége pedig nagyobb marad a levegő sűrűségénél. (A vízgőz „könnyebb", az étergőz „nehezebb" a levegőnél.)

Tekintsük először az A) esetet, amikor mindkét lombikba vizet töltöttünk. Ekkor az egyenes nyakú lombikban képződő vízgőz előbb-utóbb betölti a lombik nyakát, azonban nem maradhat stabilan a nála „nehezebb" levegő alatt, hanem felszáll, helyet adva a levegőnek, valamint az újabb és újabb vízgőzképződésnek; így a víz hamarosan elforr.

A görbe nyakú lombik nyakát is betölti a vízgőz, innen azonban csak „lefelé" tudna kiszabadulni, miközben a sűrűbb levegőnek kellene felfelé, a vízgőz helyére áramlania. Ez nem történik meg olyan hevességgel, mint az egyenes nyakú lombiknál, mert most csak diffúzióval tud eltávozni a vízgőz, ami viszont lassú folyamat. Az A) esetben tehát a vízgőz az egyenes nyakú csőből szabadul ki gyorsabban, vagyis ebből a lombikból forr el hamarabb a víz.

Nyilvánvaló, hogy a B) esetben, amikor a forráspontján tartott éter van a lombikokban, a helyzet éppen fordított. Az egyenes nyakú lombik nyakában megül az étergőz, nem fog felszállni a nála kisebb sűrűségű levegőbe. A nyak felső végénél diffundálnak az étermolekulák a levegőbe, ezért csak hosszú idő alatt forr el és távozik az éter a lombikból.

A lefelé görbülő nyakú lombik nyakából viszont „kifolyik" a nehéz étergőz a levegőbe, helyére nemcsak levegő, hanem a lombikból újabb étergőz áramlik, gyorsítva ezzel az éter elforrását.

3. Hosszú, keskeny, függőleges üvegcsövet egy vele azonos tengelyű, de sokkal szélesebb, r külső sugarú másik üvegcső vesz körül. E szélesebb csövön sűrűn, egymástól h távolságra elhelyezkedő, R ellenállású körvezetők vannak.

Ha a keskeny csőbe egy m tömegű, d erősségű (mágneses dipólnyomatékú) kicsiny rúdmágnest ejtünk, az viszonylag hamar elér egy állandó v_0 sebességet, amellyel egyenletesen süllyed.(*6. ábra.*)

További kísérleteink során a fenti öt mennyiség (m, d, h, R, r) közül az egyiket mindig a *kétszeresére* növeljük, miközben a másik négyet nem változtatjuk meg. *Hányszorosára* nő az egyes esetekben a kicsiny rúdmágnes állandósult végsebessége?

Az eredeti eset: m, d, h, R, r; ekkor $v = v_0$.

a) $(2m,\ d,\ h,\ R,\ r)$; $v_a/v_0 =?$

b) $(m,\ 2d,\ h,\ R,\ r)$; $v_b/v_0 =?$

c) $(m,\ d,\ 2h,\ R,\ r)$; $v_c/v_0 =?$

d) $(m,\ d,\ h,\ 2R,\ r)$; $v_d/v_0 =?$

e) $(m,\ d,\ h,\ R,\ 2r)$; $v_e/v_0 =?$

A mechanikai súrlódástól és a közegellenállástól, továbbá a körvezetők önindukciójától és kölcsönös indukciójától eltekinthetünk.

(Gnädig Péter)

Megoldás[1]**.** Számítsuk ki, mennyi energia disszipálódik (mennyi Q hő fejlődik) *egyetlen* körvezetőben, miközben a mágnes keresztülesik rajta. Kétféleképpen is következtethetünk erre a Q mennyiségre: egyrészt az energiaviszonyok összevetéséből, másrészt dimenzionális megfontolásokból.

Ha az m tömegű mágnes egyenletesen mozog függőlegesen lefelé a csőben és L utat tesz meg, helyzeti energiája mgL értékkel csökken. Eközben áthalad L/h darab körvezetőn, mindegyikben Q hőt fejleszt, és mivel a mágnes mozgási energiája nem változik, fenn kell álljon, hogy

$$mgL = QL/h, \qquad \text{azaz} \qquad Q = mgh.$$

Milyen fizikai mennyiségektől és milyen módon függhet Q? Nyilván függ a hőfejlődés a kicsiny mágnes jellemzőitől (a d dipólnyomatéktól és a v sebességtől), továbbá a körvezető adataitól (az r sugártól és a vezető R elektromos ellenállásától):

$$Q = F(d,\ v,\ r,\ R),$$

ahol F valamilyen négyváltozós függvény, melynek pontos (vagy legalább arányossági tényezők erejéig határozott) alakja megadná a feladat valamennyi kérdésére a választ.

Ha dimenzionális megfontolásokkal akarjuk „kitalálni", hogyan függ $F(d,\ v,\ r,\ R)$ az egyes változóitól, nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy Q a felsorolt mennyiségek mellett függhet még μ_0-tól (a vákuum permeabilitásától), ami

[1]Terpai Tamás dolgozata alapján

ugyan nem változó, hanem egy meghatározott mértékegységű és nagyságú mennyiség, de a hőfejlődés képletében (lévén az mágnességgel kapcsolatos folyamatok eredménye) ez a fizikai állandó is felbukkanhat. A keresett összefüggés tehát

$$Q = G(d,\ v,\ r,\ R,\ \mu_0),$$

alakú, ahol G egy ötváltozós függvény, melyet azonban az SI itt előforduló *négy* alapmértékegységének (kg, m, s, A) vizsgálatából nem lehet meghatározni.

A feladat mégis megoldható a dimenzióanalízis módszerével, ugyanis a hőfejlődés és az R ellenállás közötti összefüggés (a többi adat rögzített értéke mellett) fordított arányosság kell legyen (azaz $Q \propto 1/R$), hiszen az áram hőhatása (adott módon változó indukált feszültség mellett) az ellenállás reciprokával arányos. Mondhatjuk tehát, hogy

$$Q \propto \frac{1}{R} f(d,\ v,\ r,\ \mu_0),$$

ahol $f(d,\ v,\ r,\ \mu_0)$ már csak 4 fizikai mennyiségtől függ.

Írjuk fel az egyes fizikai mennyiségek mértékegységét:

$$[Q] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}, \qquad [1/R] = \frac{\mathrm{s^3\,A^2}}{\mathrm{kg\,m^2}} \quad [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad [d] = \mathrm{A\,m^2}, \qquad [r] = \mathrm{m}, \qquad [\mu_0] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{A^2\,s^2}}.$$

Ha a keresett f függvényt hatványfüggvény alakban próbáljuk felírni[2]:

$$h(d,\ v,\ r,\ \mu_0) \propto d^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma \cdot \mu_0^\delta,$$

akkor a 4 független mértékegység hatványainak összehasonlításából a kitevőkre

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = -3, \qquad \delta = 2$$

adódik. Ezek szerint

$$Q = mgh \propto \frac{(\mu_0 d)^2 v}{R r^3},$$

vagyis a mágnes esési sebességének és a többi paraméternek a kapcsolata:

$$v \propto \frac{mhRr^3}{d^2}.$$

Ez a formula a feladat valamennyi kérdésére megadja választ: akár a tömeget, akár a menettávolságot, vagy a körvezetők elektromos ellenállását növeljük az eredeti érték kétszeresére, a mágnes esési sebessége 2-szer nagyobb lesz. Kétszer erősebb mágnes az eredetinél 4-szer lassabban fog mozogni, végül pedig a körvezetők sugarának kétszerezése a sebességet az eredeti érték 8-szorosára növeli.

⋆

Az eredményhirdetésre és az ünnepélyes díjkiosztásra az ELTE új, lágymányosi épületének egyik nagyobb előadótermében került sor 1999. november 19-én. Itt először a Versenybizottság elnöke megemlékezett Sztrókay Pálról (1899–1965) és Náray-Szabó Istvánról (1899–1972), akik éppen száz évvel ezelőtt születtek, s az 1917. évi tanulóversenyen az 1. és 2. díjat nyerték. Sztrókay Pál Kossuth-díjas mérnök lett, a Ganznál a villamos vontatás fejlesztésén dolgozott, Kandó Kálmán utáni második emberként. Náray-Szabó István nemzetközi tekintélyű vegyészprofesszor lett, a fizika és a kémia határterületén alkotott: röntgendiffrakcióval kutatta az anyag kémiai-fizikai szerkezetét.

A rövid megemlékezések után került sor idei feladatok megoldásának diszkussziójára. Az első feladat megoldását Radnai Gyula, a másodikat az egyik versenyző (Tóth Bálint), a harmadikat Gnädig Péter mutatta be. A harmadik feladathoz kapcsolódóan, azt modellezve kísérleteket is láthattak a megjelentek: más-más falvastagságú, más-más fémből készült csöveknél különböző erősségű rúdmágnesek esési idejét figyelhették meg, s így összehasonlíthatták különféle körülmények között kialakuló örvényáramok fékező hatását.

Az ünnepélyes eredményhirdetésen Fehér István, az ELFT alelnöke adta át (a feladatok kitűzőiből álló) Versenybizottság által odaítélt díjakat. A Társulat által biztosított pénzjutalmak mellett a Nemzeti Tankönyvkiadótól könyvutalványokat kaptak a díjazott versenyzők, akiknek jelen levő tanárai a Műszaki Kiadó és a Tankönyvkiadó ajándék-könyveiből válogathattak. Sajnos nem mindenki tudott eljönni: az éppen a díjkiosztás napján kitört hóvihar miatt maradt le az ünnepségről néhány régi Eötvös-verseny nyertes is.

[2]Belátható, hogy ezt az általánosság megszorítása nélkül megtehetjük.

7. ábra

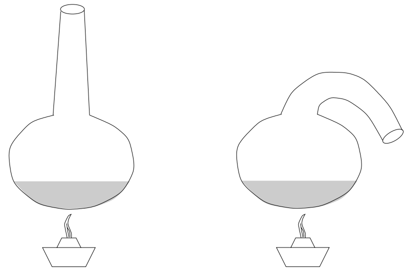
Az 1999. évi Eötvös-verseny díjazottai (fentről lefelé, balról jobbra): Péterfalvi Csaba Géza, Terpai Tamás, Gáspár Merse Előd, Buruzs Ádám, Katona Gergely, Csillag Kristóf, Hegedűs Ákos, Patay Gergely, Tóth Bálint, Pesti Gábor és Czigler István.

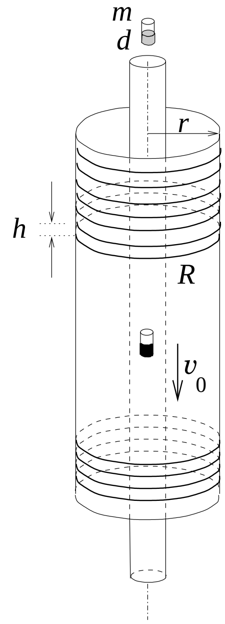
A mostani verseny eredménye a következő:
Első díjat kapott: **Terpai Tamás**, az ELTE matematikus hallgatója, aki a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa.
Második díjat kapott a verseny 2–6. helyezettje: **Hegedűs Ákos**, a pécsi ciszterci Nagy Lajos Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Orovica Márkné* tanítványa; **Katona Gergely**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a budapesti ELTE Trefort Ágoston Gyakorlóiskolában érettségizett mint *Szörényi Zoltán* tanítványa; **Pesti Gábor**, a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Piriti János* tanítványa; **Péterfalvi Csaba Géza**, az ELTE geofizikus hallgatója, aki a szekszárdi Garay János Gimnáziumban érettségizett mint *Bayer József* tanítványa; **Tóth Bálint**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa.
Harmadik díjat kapott a verseny 7–10. helyezettje: **Béky Bence**, a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 10. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Csillag Kristóf**, a püspökladányi Karacs Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Lajtosné Buzási Márta* tanítványa; **Gáspár Merse Előd**, a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Patay Gergely**, a debreceni Tóth Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Kovács Miklós* és *Szegedi Ervin* tanítványa.
Dicséretben részesült a verseny 11–13. helyezettje: **Buruzs Ádám**, a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Mike János* tanítványa; **Czigler István**, a budapesti Lauder Javne Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Tóth Eszter* tanítványa; **Kenyeres Péter**, a POTE orvostanhallgatója, aki a zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban érettségizett mint *Pálovics Róbert* tanítványa.

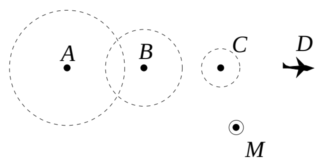
Az 1. díjas versenyző 10 000 Ft pénzjutalmat és 5 000 Ft értékű könyvutalványt, a 2. díjasok 6 000 Ft pénzjutalmat és 4 000 Ft értékű könyvutalványt, a 3. díjasok 4 000 Ft pénzjutalmat és 4 000 Ft értékű könyvutalványt, a dicséretben részesültek 3 000 Ft értékű könyvutalványt kaptak.

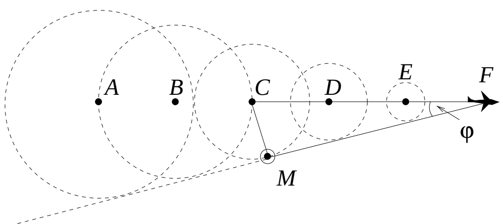
Gratulálunk a nyerteseknek és tanáraiknak!

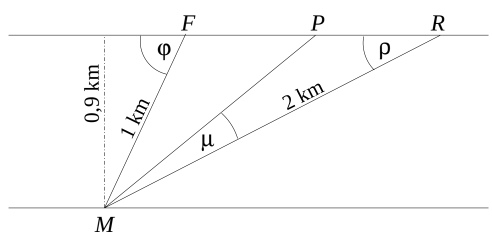
Gnädig Péter, Radnai Gyula

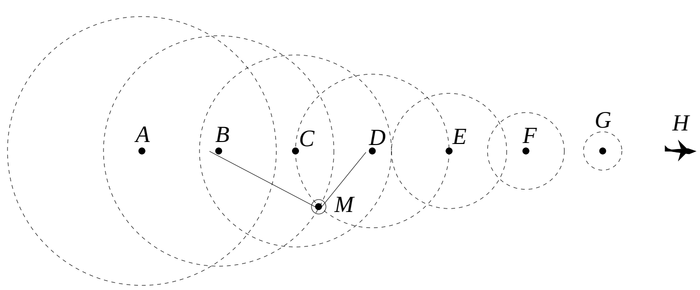



m
d
r
h
R
v_0


A
B
C
D
M


A
B
C
D
E
F
φ
M


F
P
R
φ
ρ
0,9 km
1 km
2 km
μ
M


A
B
C
D
E
F
G
H
M