A múlt havi számunkban közreadtuk az 1999. évi Téli Ankét totó-kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

$$2,2,\mathrm{X},\qquad 1,\mathrm{X},2,\qquad 2,2,\mathrm{X},\qquad 2,2,\mathrm{X},\qquad 2,1.$$

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. A $0+999, 1+998, \ldots, 499+500$ számpárokban a jegyek összege 27, és mivel 500 ilyen pár van, ezek számjegyeinek összege $50\cdot 27=13\,500$. Az $1000+1999$, $1001+1999$, $\ldots$ $1499+1500$ párok jegyeinek összege $50\cdot 29=14\,500$, s ha ezekhez hozzáadjuk 2000 számjegyeinek összegét, megkapjuk a 28 002-es végeredményt.

2. A vízszintesen, egyenletes sebességgel mozgó mézescsuporban a bubororék v_1 emelkedési sebessége a felhajtóerővel, az pedig a nehézségi gyorsulással arányos: $v_1=k\cdot g$. Amikor a v_2 sebességű szánkó (és vele együtt a csupor is) lefékeződik, a buborék a vízszintes gyorsulással arányos tehetetlenségi erő hatására vízszintes irányban elmozdul. A buborék pillanatnyi vízszintes sebessége a szánkó pillanatnyi vízszintes gyorsulásával arányos:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=-k\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Összegezve a vízszintes elmozdulásokat:

$$\sum\Delta x=-k\sum\Delta v=-k\cdot(-v_2)=\frac{v_1\cdot v_2}{g}.$$

A megadott számadatokkal ez az elmozdulás 1 mm.

3. Az 5-ös lottónál a nem nyerés esélye (vagyis annak valószínűsége, hogy vagy 0, vagy 1 találatunk legyen):

$$\frac{\binom{85}{5}+5\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}\approx 0,977,$$

a nyerés esélye ezek szerint 2,3 %.

A 6-os lottónál a megfelelő valószínűség:

$$\frac{\binom{45}{6}-\left[\binom{39}{6}+6\binom{39}{5}\right]}{\binom{45}{6}}\approx 0,176,$$

a legalább 2 találat esélye: 17,6 %. Hasonlóan számítható ki, hogy a nyerés (legalább 3 találat) esélye: 2,4 %.

A skandináv lottónál annak valószínűsége, hogy egy húzásnál legalább 2 találatunk legyen:

$$p=\frac{\binom{35}{7}-\left[\binom{28}{7}+7\binom{28}{6}\right]}{\binom{35}{7}}\approx 0,432.$$

Mivel két húzáson vesz részt minden szelvény, ezek valamelyikén elért 2 találat esélye: $1-(1-p)^2=2p-p^2=0{,}677$. A nyerés (2 sorsolás valamelyikén legalább 4 találat) valószínűsége itt 3,6 %.

4. Átlagosan ugyanannyi autó közlekedik keletről nyugatra, mint nyugatról keletre, ezek azonban (az utak, autópályák véges szélessége miatt) különböző távolságra vannak a Föld forgástengelyétől, tehát eredő perdületük nem nulla. Ha valamennyi angliai jármű ellentétes irányban haladna, az impulzusnyomatékuk megváltozna, emiatt a Föld szögsebességének is változnia kellene. A nap hossza igen kicsiny mértékben, de megnőne.

5. Az a pont, ahol a háromszögbe írt kör érinti az AB oldalt, az eredeti helyzetébe kerül vissza, ez a transzformáció fixpontja.

6. A v sebességgel haladó láda egységnyi idő alatt a sebességével arányos számú görgőt hoz mozgásba, s ezek mindegyike a láda sebességével megegyező kerületi sebességre gyorsul fel, összes mozgási energiájuk tehát a sebesség köbével arányos. Belátható, hogy a görgők felgyorsítása közben a súrlódás miatt fejlődő hő ugyanakkora, mint a görgők forgási energiája, tehát a fékezőerő összteljesítménye is a sebesség köbével arányos. Másrészt viszont ez a teljesítmény a fékezőerő és a sebesség szorzataként is felírható, a fékezőerő tehát (a közegellenállási erőhöz hasonlóan) a sebesség négyzetével arányos.

7. Az $a_{mn}=m\cdot n(m^4-n^4)=m\cdot n(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$ $(1\le n<m)$ számok oszthatók 2-vel, 3-mal és 5-tel, másrészt közülük a legkisebb: $a_{21}=30$, a legnagyobb közös osztójuk tehát 30.

8. A két rúdmágnes különböző nagyságú, *azonos* irányú forgatónyomatékot fejt ki egymásra! (Vajon forgásba jön-e a két mágnesből álló rendszer, ha a megadott elrendezésben egy műanyagvonalzóhoz erősítjük őket és a vonalzót a tömegközéppontjánál csapágyazzuk?)

9. Belátható, hogy ha a dézsában egyetlen pohár úszik, akkor akár a pohárba, akár a dézsába öntünk bele adott mennyiségű vizet, a pohárban levő víz szintje a dézsa aljához viszonyítva mindkét esetben ugyanolyan magasra kerül.

Eszerint sok pohár esetén sem számít, hogy a legkisebb alapterületűbe, valamelyik nagyobb pohárba, vagy akár a dézsába öntjük a vizet, a legkisebb pohár vízszintje ugyanolyan magasságba kerül.

Ha az 1 m^2 alapterületű dézsába öntünk 3 cm^3 vizet, valamennyi pohár és valamennyi vízszint 0,003 mm-t emelkedik fel. Ha a legkisebb pohárba öntjük a 3 cm^3-nyi vizet, a benne levő víz szintje ugyanennyit (0,003 mm-t) emelkedik, a pohár maga pedig (1 cm−0,003 mm)-t süllyed. A feltett kérdésre tehát további adatok ismerete *nélkül* is válaszolhatunk.

10. A mérleg a teljes rendszer által a mérlegre kifejtett erőt F mutatja. Ugyanilyen nagyságú (de ellentétes irányú) erőt fejt ki a mérleg is a hordóból, az állványból a kádból és a sörből „álló" rendszerre. A rendszerre ható eredő erő (a függőlegesen lefelé mutató irányt tekintve pozitívnak): $mg - F$. Ha a rendszer tömegközéppontja *áll* (vagy egyenletes sebességgel mozog), akkor $mg - F = 0$, ha viszont a tömegközéppont gyorsulása (lefelé) a, akkor az $mg - F = ma$ mozgásegyenletből $F = mg - ma$. Jelen esetben a rendszer tömegközéppontja (a sör mozgása miatt) lassan süllyed lefelé, de ez a mozgás nem egyenletes, hanem lassuló, hiszen a hordóban levő sörszint csökkenése miatt a kiáramlás sebessége fokozatosan csökken. Eszerint $a < 0$, tehát $F > mg$. (Ugyanez az effektus mérlegre állított homokóránál nem lépne fel, mert a homok lepergési sebessége — a folyamat kezdeti és végső pillanatait leszámítva — nem függ a homokréteg magasságától.)

11. 20 000 ember közül átlagosan 0,95 bizonyul pozitívnak és ténylegesen betegnek, a tévesen betegnek diagnosztizáltak száma pedig átlagosan $0{,}05 \cdot 19\,999$. Így a betegek és a pozitívok aránya:

$$\frac{0{,}95}{0{,}95 + 0{,}05 \cdot 19\,999} \approx 0{,}001 = 0{,}1\,\%.$$

12. Ha egy homogén henger fedőlapjának közepénél g a nehézségi gyorsulás, akkor onnan egy egységnyi tömegű (kicsiny) testet Δx magasságra emelve $W = g\Delta x$ munkát kell végeznünk. Ez a munka a rendszer gravitációs helyzeti energiájának megváltozásával egyenlő, és úgy is kiszámítható, mintha egy Δx vastag réteget gondolatban levágtunk volna a henger egyik „végéről", s a henger másik végére helyeztük volna át. Az áthelyezés során a helyzeti energia éppen annyit változik meg, mint amennyi munkát az egész henger δx távolságra történő elmozdításakor végzünk. Ez a munka integrálszámítás segítségével adható meg:

$$W = g_{\text{henger}}\Delta x = 2\pi f\varrho\left(R + H - \sqrt{R^2 + H^2}\right) \cdot \Delta x.$$

A fenti képletnek megfelelő g akkor egyezik meg az R sugarú, ϱ sűrűségű gömb alakú Föld felszínén mérhető $g = \dfrac{4}{3}\pi f\varrho R$ gyorsulással, ha $H = \dfrac{4}{3}R$.

Megjegyzés. Vigyázat: a henger gravitációs tere nem számolható úgy, mintha a teljes tömege a tömegközéppontban helyezkedne el. Ha mégis így tennénk, akkor a $H = 3R$ hibás eredményt kapnánk.

13. Az $\left[\dfrac{x}{2000}\right] = \left[\dfrac{x}{1999}\right]$ egyenletnek 1 999 000 nemnegatív egész megoldása van.
Legyen $a = 1999$, akkor az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = \left[\frac{x}{a}\right] = 0$$

egyenletnek $x = 0, 1, \ldots, a-1$, tehát a darab megoldása van, az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = \left[\frac{x}{a}\right] = 1$$

egyenletnek $a + 1 \le x < 2a$, azaz $a - 1$ darab megoldása van, s általában az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = \left[\frac{x}{a}\right] = k$$

egyenletnek egyenletnek $a - k$ megoldása (ha $a > k$). Az összes megoldás száma

$$\sum_{k=0}^{a}(a-k) = 1 + 2 + \ldots + 1999 = 1\,999\,000.$$

13 + 1. *John Leech* mutatta meg, hogy van olyan tetraéder, amelynek egészek az élei, egész szám a felszíne és egész a térfogata is. Az $a = 148$, $b = 195$, $c = 203$ oldalú háromszög hegyesszögű, és a területe egész (nevezetesen 13 650). Igaz továbbá, hogy ha ABC egy hegyesszögű háromszög, akkor létezik egy olyan tetraéder, melynek minden lapja egybevágó az ABC háromszöggel, és az ilyen tetraéder térfogata

$$V = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{72}},$$

ami most 611 520. (Ez a pótkérdés igazából „lottó-kérdés” volt, itt logikus gondolkodás helyett inkább szerencsés tippelésre volt szükség!)

12. Ha egy homogén henger fed?lapjának közepénél g a nehézségi gyorsulás, akkor onnan egy egységnyi tömeg? (kicsiny) testet Δx magasságra emelve $W = g\Delta x$ munkát kell végeznünk. Ez a munka a rendszer gravitációs helyzeti energiájának megváltozásával egyenl?, és úgy is kiszámítható, mintha egy Δx vastag réteget gondolatban levágtunk volna a henger egyik „végér?l”, s a henger másik végére helyeztük volna át. Az áthelyezés során a helyzeti energia éppen annyit változik meg, mint amennyi munkát az egész henger δx távolságra történ? elmozdításakor végzünk. Ez a munka integrálszámítás segítségével adható meg:

$$W = g_{\text{henger}}\Delta x = 2\pi f \varrho \left(R + H - \sqrt{R^2 + H^2}\right) \cdot \Delta x.$$

A fenti képletnek megfelel? g akkor egyezik meg az R sugarú, ϱ s?r?ség? gömb alakú Föld felszínén mérhet? $g = \frac{4}{3}\pi f \varrho R$ gyorsulással, ha $H = \frac{4}{3}R$.

Megjegyzés. Vigyázat: a henger gravitációs tere nem számolható úgy, mintha a teljes tömege a tömegközéppontban helyezkedne el. Ha mégis így tennénk, akkor a $H = 3R$ hibás eredményt kapnánk.

13. Az $\left[\frac{x}{2000}\right] = \left[\frac{x}{1999}\right]$ egyenletnek 1 999 000 nemnegatív egész megoldása van.

Legyen $a = 1999$, akkor az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = \left[\frac{x}{a}\right] = 0$$

egyenletnek $x = 0, 1, \ldots, a-1$, tehát a darab megoldása van, az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = \left[\frac{x}{a}\right] = 1$$

egyenletnek $a + 1 \le x < 2a$, azaz $a - 1$ darab megoldása van, s általában az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = \left[\frac{x}{a}\right] = k$$

egyenletnek egyenletnek $a - k$ megoldása (ha $a > k$). Az összes megoldás száma

$$\sum_{k=0}^{a}(a-k) = 1 + 2 + \ldots + 1999 = 1\,999\,000.$$

13 + 1. *John Leech* mutatta meg, hogy van olyan tetraéder, amelynek egészek az élei, egész szám a felszíne és egész a térfogata is. Az $a = 148$, $b = 195$, $c = 203$ oldalú háromszög hegyesszög?, és a területe egész (nevezetesen 13 650). Igaz továbbá, hogy ha ABC egy hegyesszög? háromszög, akkor létezik egy olyan tetraéder, melynek minden lapja egybevágó az ABC háromszöggel, és az ilyen tetraéder térfogata

$$V = \sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{72}},$$

ami most 611 520. (Ez a pótkérdés igazából „lottó-kérdés” volt, itt logikus gondolkodás helyett inkább szerencsés tippelésre volt szükség!)