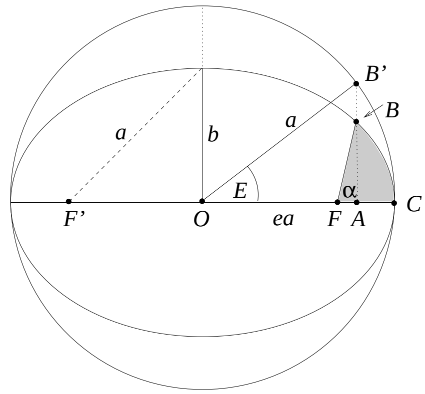
A bolygók – Kepler I. törvénye szerint – olyan ellipszispályán mozognak, melynek egyik (F) fókuszpontjában a Nap található. A bolygó pillanatnyi helyzete pl. az *ábrán* látható α szöggel jellemezhető. A mozgás időbeli leírása, vagyis az α szöghöz tartozó CB ív befutásához szükséges idő megadása (a körpálya speciális esetét leszámítva) általában nem könnyű feladat.



Kepler – még a differenciálszámítás ismerete előtt – levezetett egy olyan összefüggést, melynek segítségével kiszámítható egy tetszőleges ellipszis-ív befutásához szükséges idő. Az egyenlet Kepler II. törvényén, a területi sebesség állandóságán alapszik.

Tekintsünk egy a és b féltengelyű ellipszist, és használjuk az

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\qquad \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$$

összefüggéseket. (e az ellipszis *„excentricitása”*, kör esetében $e=0$, parabolává fajuló „ellipszisre” pedig $e\to 1$.)

Nagyítsuk meg az ellipszist a kistengelye mentén a/b-szeresére, így egy a sugarú kört kapunk. Jelöljük a B helyen levő bolygónak megfelelő pontot a körön B'-vel, a COB' szöget pedig E-vel. (Ezt a szöget az égi mechanikában *excentrikus anomáliának* nevezik.)

Kepler II. törvénye szerint a BC ív befutásához szükséges t idő úgy aránylik a T keringési időhöz, mint a vezérsugár által súrolt A_{FCB} terület (az ábrán satírozott rész területe) az ellipszis teljes területéhez. Ugyanez az arány a nagyítás után adódó körön is leolvasható:

$$\frac{t}{T}=\frac{A_{FCB'}}{a^2\pi}.$$

Másrészt viszont az $A_{FCB'}$ terület az OCB' körcikk $a^2E/2$ területének és az OFB' háromszög területének különbsége. Mivel az ellipszis középpontjának és a fókuszpontjának távolsága

$$OF=\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=a\cdot e,$$

az OFB' háromszög B' csúcsponthoz tartozó magassága pedig $a\cdot\sin E$, felírhatjuk, hogy

$$\frac{t}{T}=\frac{\frac{1}{2}a^2E-\frac{1}{2}ae\cdot a\sin E}{a^2\pi},\qquad \text{ahonnan}\qquad t=T\,\frac{E-e\sin E}{2\pi}.$$

Ez Kepler egyenlete.

Az egyenlet gyakorlati alkalmazhatóságához meg kell határoznunk még a bolygó helyzetét jellemző α szög és az E szög közötti kapcsolatot. Elemi trigonometriai átalakítások segítségével belátható, hogy a kérdéses összefüggés a következő:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Tekintsük ugyanis az FAB háromszöget:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BA}{FA}=\frac{\sqrt{1-e^2}\cdot B'A}{FA}=\frac{a\sin E\sqrt{1-e^2}}{a\cos E-ea}=\frac{\operatorname{tg}E\sqrt{1-e^2}}{1-e\sqrt{1+\operatorname{tg}^2E}}.$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\qquad\text{és}\qquad \operatorname{tg}E=\frac{2\operatorname{tg}\frac{E}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}},$$

amelyeket a fentebbi összefüggésbe helyettesítve némi átalakítás után

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2}}{1-\frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}}$$

adódik. Jelöljük $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$-t n-nel, $\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$-t pedig m-mel, akkor a fenti összefüggés így néz ki:

$$\frac{n}{1-n^2}=\frac{m}{1-m^2},\qquad \text{ahonnan}\qquad (n-m)(1+nm)=0.$$

Ez utóbbi viszont csak $n=m$, vagyis

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

fennállása esetén teljesülhet, hiszen nm sosem negatív.

A fenti összefüggés segítségével adott α esetén könnyen kiszámíthatjuk az excentrikus anomáliát (E-t), abból pedig a t időt, így a $t(\alpha)$ függvényt, a bolygó mozgását megadó $\alpha(t)$ függvény inverzét.

Horányi Gábor