Tegyük fel, hogy h egy olyan függvény, amelyik kielégíti a feltételeket, azaz minden valós számra értelmezve, van minden valós értéket pontosan egyszer vesz fel és minden valós x-re teljesül, hogy

$$h(x^2+ax+b)=\big(h(x)\big)^2. \tag{1}$$

A $\big(h(x)\big)^2$ függvény minden pozitív valós számot pontosan kétszer vesz fel, a 0-t pedig egyszer. Az

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

függvény a minimumát $x=-\dfrac{a}{2}$-nél veszi fel, minden más – a minimumnál nagyobb – értéket pontosan kétszer vesz fel. Ebből következik – figyelembe véve a h függvény tulajdonságát –, hogy $x=-\dfrac{a}{2}$-re az (1) egyenlőség mindkét oldala 0 értéket ad, azaz

$$h\left(b-\frac{a^2}{4}\right)=h\left(-\frac{a}{2}\right)=0.$$

Mivel a h függvény a 0-t is csak egy helyen veszi fel, tehát

$$b-\frac{a^2}{4}=\frac{a}{2} \tag{2}$$

szükséges feltétele annak, hogy a két függvény hasonló legyen.

A (2) feltétel teljesülése elégséges is, mert például a $h(x)=x+\dfrac{a}{2}$ függvény kielégíti a feladat feltételeit.

Knébel István (Budapest, József A. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Könnyen ellenőrizhető, hogy a feladat feltételeit a

$$h(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^{2k-1}\ (k=0,1,2,\ldots)$$

függvények mind kielégítik.

2. A feltételeket kielégítő h függvénynek van inverz függvénye is, jelöljük ezt h^{-1}-gyel. A h^{-1} függvény szintén kielégíti a feltételeket, ha f és g szerepét felcseréljük, azaz a $h\big(f(x)\big)=g\big(h(x)\big)$ egyenlőtlenségből $h^{-1}\big(g(x)\big)=f\big(h^{-1}(x)\big)$ következik. Az f és g függvények szerepe tehát szimmetrikus.