Elméleti forduló

1. feladat. *Néhány (egymástól független) probléma.*

A) a) A „halálugró” ember sebessége akkor csökken először nullára, amikor a gravitációs helyzeti energia csökkenése megegyezik a kötélben tárolt rugalmas energiával:

$$mgy = \frac{1}{2}k(y-L)^2.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai:

$$y = \frac{kL + mg \pm \sqrt{2mgkL + m^2g^2}}{k}.$$

Esetünkben a gyökjel előtt a negatív előjelet kell választanunk, hiszen az alacsonyabb helyzetű (nagyobb y-hoz tartozó) egyensúlyi helyzetet keressük.

b) Az ugró ember sebessége akkor maximális, amikor a gyorsulása nulla, vagyis amikor az erőegyensúly $mg = kx$ feltétele teljesül. Ebben a pillanatban a munkatétel szerint

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mg(L+x) - \frac{1}{2}kx^2,$$

ahonnan $x = mg/k$ felhasználásával a kérdéses sebesség

$$v_{\max} = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

c) Az ugró ember első megállásáig eltelő idő két tag összegeként számítható ki: a kötél megfeszüléséig a mozgás szabadesés, ennek időtartama $t_1 = \sqrt{2L/g}$, majd az ezt követő harmonikus rezgőmozgás bizonyos szakaszának t_2 ideje együtt teszi ki a kérdéses időtartamot.

A harmonikus rezgőmozgás periódusideje $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, körfrekvenciája $\omega = \sqrt{k/m}$. A sebesség időbeli változása

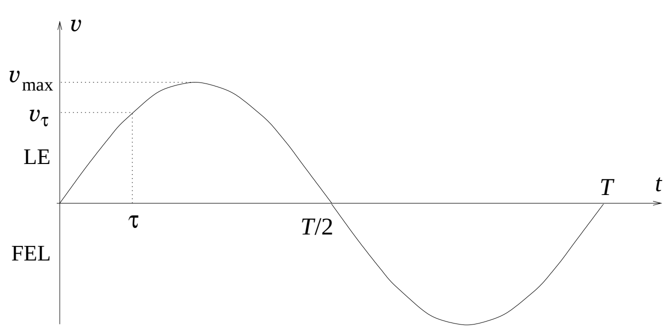
$$v(t) = v_{\max}\sin(\omega t)$$

alakban írható fel, kezdetét pedig az a τ időpillanat jellemzi, melynél a rezgő test sebessége éppen megegyezik a szabadesés végsebességével, vagyis a $v_\tau = gt_1 = \sqrt{2gL}$ mennyiséggel (*1. ábra*). Innen

$$\tau = \frac{1}{\omega}\text{arc sin}\,\frac{\sqrt{2gL}}{v_{\max}},$$

az esés teljes ideje pedig az első megállásig

$$t_{\text{teljes}} = t_1 + t_2 = t_1 + \left(\frac{T}{2} - \tau\right) = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\pi - \text{arc sin}\,\frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}}\right).$$



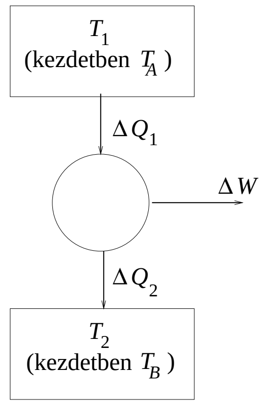
1. ábra

B) Jelöljük az A test által leadott hőt ΔQ_1-gyel, a B test által felvett hőt pedig ΔQ_2-vel. Ezeket a mennyiségeket kifejezhetjük a megfelelő hőmérsékletváltozásokkal:

$$\Delta Q_1 = -ms\Delta T_1, \qquad \Delta T_1 \text{ negatív},$$

[1] A feladatok szövegét októberi számunkban közöltük

$$\Delta Q_2 = ms\Delta T_2, \qquad \Delta T_2 \text{ pozitív.}$$



2. ábra

a) A hőerőgép akkor végzi a lehető legtöbb munkát, ha Carnot-gépként működik. Ilyenkor

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2},$$

vagyis

$$-ms\frac{\Delta T_1}{T_1} = ms\frac{\Delta Q_2}{T_2}.$$

Ez az összefüggés

$$T_1 \cdot \Delta T_2 + T_2 \cdot \Delta T_1 = \Delta\left(T_1 \cdot T_2\right) = 0,$$

tehát $T_1 \cdot T_2 =$ állandó alakba is írható. Eszerint a végső (közös) hőmérséklet: $T_0 = \sqrt{T_A\,T_B}$.

Ugyanez az eredmény integrálszámítással is megkapható:

$$-ms\int_{T_A}^{T_0}\frac{dT_1}{T_1} = ms\int_{T_B}^{T_0}\frac{dT_2}{T_2},$$

ahonnan $\ln(T_A/T_0) = \ln(T_0/T_B)$, vagyis $T_0 = \sqrt{T_A\,T_B}$ következik.

b) A munkavégzés a leadott és a felvett hő különbségéből számítható:

$$W = Q_1 - Q_2 = ms\left(T_A - T_0\right) - ms\left(T_0 - T_B\right) =$$
$$= ms\left(T_A + T_B - 2T_0\right) = ms\left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B}\right)^2.$$

c) A megadott számadatokkal $W = 20$ MJ.

C) a) A kezdetben N_0 darab ^{238}U izotópból t idő múlva már csak $N = N_0\,e^{-\lambda t}$ marad, tehát a bomlástermékének száma $n = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = N\left(e^{\lambda t} - 1\right)$. Mivel a λ bomlásállandó és a T felezési idő közötti kapcsolat: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T} = \dfrac{0{,}693}{T}$, az ^{238}U atomok pillanatnyi ^{238}N száma és a bomlása során keletkező ^{206}Pb atomok pillanatnyi ^{206}n száma közötti kapcsolat (ha az időt milliárd év egységekben mérjük):

$$^{206}n = {}^{238}N\left(e^{0{,}154\,t} - 1\right) = {}^{238}N\left(2^{t/4{,}50} - 1\right).$$

b) Hasonlóan az előbbi pontban leírtakhoz

$$^{207}n = {}^{235}N\left(e^{0{,}976\,t} - 1\right) = {}^{235}N\left(2^{t/0{,}710} - 1\right).$$

c) Az urán-ólom keverékben (ahol a radioaktív bomlások során folyamatosan keletkeznek ólom atomok), a különböző tömegszámú ólomizotópok számának aránya:

$$204 : 206 : 207 \qquad \Rightarrow \qquad 1{,}00 : 29{,}6 : 22{,}6.$$

A tiszta ólomban a megfelelő arányok:

$$204 : 206 : 207 \qquad \Rightarrow \qquad 1{,}00 : 17{,}9 : 15{,}5.$$

A fenti arányszámok különbségét képezve látható, hogy a radioaktív bomlásokból származó ólomizotópok aránya:

$$206 : 207 \qquad \Rightarrow \qquad 11{,}7 : 7{,}1.$$

Az a) és a b) alkérdések megoldásában szereplő egyenlőségek hányadosát képezve:

$$\frac{^{206}n}{^{207}n} = \frac{^{238}N}{^{235}N}\,\frac{e^{0{,}154\,t}-1}{e^{0{,}976\,t}-1},$$

ahonnan a Föld T életkorára a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{11{,}7}{7{,}1} = 137\,\frac{e^{0{,}154\,T}-1}{e^{0{,}976\,T}-1},$$

vagyis

$$0{,}012\,\left(e^{0{,}976\,T}-1\right) = \left(e^{0{,}154\,T}-1\right).$$

d) Feltételezve, hogy $T \gg 4{,}5\cdot 10^9$ év, a fenti formulában a zárójelekben az 1-eseket elhanyagolhatjuk, s T-t könnyen kifejezhetjük (milliárd években):

$$T = \frac{\ln 0{,}012}{-0{,}822} = 5{,}38.$$

e) Láthatjuk, hogy ez a közelítő érték nem sokkal nagyobb, mint a hosszabb felezési idő (tehát a kiszámítása során alkalmazott elhanyagolás nem volt jogos!), de felhasználható egy pontosabb T érték meghatározására. Jelöljük a Föld életkorára durva közelítésben kapott 5,38 milliárd évet T^*-gal, s az eredeti egyenlet helyett tekintsük a

$$0{,}012\,\left(e^{0{,}976\,T}-1\right) = \left(e^{0{,}154\,T^*}-1\right)$$

egyenletet. Ez zárt alakban megoldható, s T-re $4{,}80\cdot 10^9$ év adódik. Ha ezen értéket írjuk T^* helyébe, T-re még jobb közelítést, $4{,}62\cdot 10^{10}$ évet kapunk. Ezt a (fokozatosan közelítő) eljárást tovább folytatva az eredmények $4{,}52\cdot 10^9$ évhez konvergálnak. (Ezt a gyököt természetesen más módszerekkel, pl. az eredeti exponenciális egyenlet grafikus megoldásával is megkaphatjuk.)

D) A homogén töltéseloszlású gömb elektromos töltéssűrűsége:

$$\varrho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (\text{ha} \quad r < R).$$

a) Az elektromos térerősség a gömb középpontjától mért r távolságban $r \le R$ esetén az r sugarú gömbben levő töltések Coulomb-terével, $r \ge R$ esetben pedig a teljes Q töltés Coulomb-terével egyezik meg:

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, ha$$

r$\le R$; Q$\frac{}{4\pi\varepsilon_0 r^2, ha}r\ge R$.

b) A teljes elektromos mező W energiája az elektromos mező térerősségének ismeretében gömbhéjak energiájából integrálható össze:

$$W = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4\,dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr\right) = \frac{3}{20}\,\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

A teljes energiát úgy is ki lehet számítani, hogy meghatározzuk, mekkora munkavégzéssel lehet vékony, egyenletesen töltött gömbhéjakban található töltéseket nagyon messziről (a „végtelenből") r sugárnak megfelelő helyzetbe hozni, miközben r fokozatosan nő 0-tól R-ig. Mivel r sugarú homogénen töltött gömb felületén az elektromos potenciál

$$U(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{r^2\varrho}{3\varepsilon_0},$$

így a teljes munka

$$W = \int_0^R$$

$$\mathrm{r}\frac{2\varrho}{3\varepsilon_0 \cdot 4\pi r^2 \varrho\, dr = \frac{4\pi\varrho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4\, dr = \frac{4\pi\varrho^2}{3\varepsilon_0}\,\frac{R^5}{5} = \frac{3}{20}\,\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}.}$$

E) A mágneses indukcióvektor vízszintes komponense

$$B = 44{,}5\ \mu\mathrm{T} \cdot \cos 64^\circ,$$

amely az a sugarú, θ szöggel jellemezhető síkban álló rézgyűrűn keresztül

$$\Phi = Ba^2\pi \sin\theta$$

mágneses fluxust eredményes. Ha a gyűrű ω szögsebességgel (közel egyenletesen) forog, a benne indukálódó pillanatnyi feszültség (elektromotoros erő)

$$U(t) = \frac{d\Phi}{dt} = Ba^2\pi\,\frac{d}{dt}\sin\omega t = Ba^2\pi\omega\cos\omega t.$$

Ez a változófeszültség a hőhatását tekintve

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_{max} = \frac{Ba^2\pi\omega}{\sqrt{2}}$$

effektív feszültséggel egyenértékű, tehát az R ellenállású rézgyűrűben átlagosan

$$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{B^2\pi^2a^4\omega^2}{2R}$$

teljesítménnyel termel hőt, s ugyanilyen mértékben csökkenti időegységenként az m tömegű, az átmérőjére vonatkoztatva $\Theta = \frac{1}{2}ma^2$ tehetetlenségi nyomatékú gyűrű mechanikai (forgási) energiáját:

$$P = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}ma^2\omega^2\right) = -\frac{1}{2}ma^2\omega\,\frac{d\omega}{dt}.$$

Ezek szerint a szögsebesség (lassú) változását megadó egyenlet:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\lambda \cdot \omega(t),$$

ahol $\lambda = B^2\pi^2a^2/(mR)$ állandó, amely a réz s sűrűségével és ϱ fajlagos ellenállásával is kifejezhető: $\lambda = B^2/(4s\varrho)$. Ez az egyenlet (differenciálegyenlet) alakilag megegyezik a radioaktív bomlások egyenletével, tehát a megoldása is azokéval egyező:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\lambda t}.$$

A szögsebesség felezési ideje (tehát az a $T_{1/2}$ idő, amikor $\omega(t) = \omega_0/2$: $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} = \dfrac{4\ln 2\, s\varrho}{B^2}$, ami a megadott számadatokkal $1{,}10 \cdot 10^6$ s ≈ 306 óra≈ 13 napnak adódik.

Az eredmény a szögsebesség változását megadó egyenletből integrálszámítással is megkapható:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\lambda \cdot \omega(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\frac{d\omega}{\omega} = -\lambda\int_0^{T_{1/2}} dt \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \lambda T_{1/2}.$$

A rézgyűrű fékeződése más módszerrel, pl. a gyűrűre ható átlagos forgatónyomaték kiszámításával, majd a forgómozgás dinamikai egyenletének felírásával és megoldásával is meghatározható.

2. feladat. *Az elektron fajlagos töltésének meghatározása.* **a)** Az elektron sebessége V gyorsítófeszültség esetén $v = \sqrt{2eV/m}$, ahol e/m a kérdéses fajlagos töltés. (Felhasználtuk, hogy az elektron gyorsítása során szerzett eV energia sokkal nagyobb, mint az elektron kezdeti mozgási energiája, de sokkal kisebb, mint az elektron nyugalmi energiája, így nincs szükség relativisztikus mozgástörvények használatára.)

Az elektronok a katód és az anód közötti D távolságot $T = D\cos\beta/v \approx D/v$ idő alatt teszik meg, miközben a mágneses tér miatt a tengelyre merőleges síkban $\omega = eB/m$ szögsebességgel (az ún. ciklotronfrekvenciával) körmozgást végeznek. A különböző irányban induló elektronok akkor fókuszálódnak az ernyőn (akkor csapódnak be közel azonos helyen), ha a T repülési idő alatt a ciklotronfrekvenciájú körmozgásban éppen egész számú kört tesznek meg. A legkisebb fókuszáló mágneses mezőben 1 kör megtételére van idő, vagyis $T = 1 \cdot (2\pi/\omega)$. Ennek feltétele:

$$\frac{D}{\sqrt{2eV/m}} = 2\pi\frac{m}{eB}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2V}{B^2D^2}.$$

b) Az elektronok akkor juthatnak csak ki az egymáshoz igen közeli lemezek közül (akkor nem ütköznek bele egyikbe sem), ha a lemezekre merőleges irányban ható eredő erő (az elektromos mezőből és a mágneses mezőből származó erők összege) éppen nulla.

Tekintsük azt az esetet, amikor $V > 0$ és $B > 0$. Ilyenkor a felső lemez pozitív, tehát a negatív töltésű elektronokra az elektromos mező *felfele* mutató erőt fejt ki. Az A tartományban (az óramutató járásával ellentétesen kanyarodó elektronoknál) a Lorentz-erő ugyancsak *felfele* mutat, ezek az elektronok tehát a felső lemezbe ütköznek, nem érhetik el a filmet.

A B tartományban az elektromos mező és a mágneses mező ellentétes irányú erőt fejt ki, ezek tehát (megfelelő nagyságú sebességgel mozgó elektronoknál) kiejtheti egymást. A film tehát az B tartományban készült. Ugyanezt állíthatjuk akkor is, ha B és V előjele negatív, hiszen ilyenkor mind az elektromos, mind pedig a mágneses erő az előzőhöz képest ellentétes irányú.

c) Itt is az elektromos és a mágneses erők egyenlőségét kell megkövetelnünk. Az elektromos mező által kifejtett erő nagysága: eV/t, a mágneses mezőé pedig $evB\sin\phi$, ahol v az elektron sebessége. Az erőegyensúly feltétele:

$$v = \frac{V}{tB\sin\phi}.$$

A legnagyobb részecskesebesség a legkisebb megfigyelt szögnek, $\phi_{\min} = 23°$-nak felel meg:

$$v_{\max} = 2{,}687 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s} = 0{,}896\, c.$$

Ez már a fénysebességgel összemérhető, a mozgási energiát tehát a

$$W_{\text{mozgási}} = W_{\text{teljes}} - W_{\text{nyugalmi}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

relativisztikus képletekből kell számítanunk. Numerikusan: $W_{\text{mozgási}} = 641$ keV.

d) A lemezek közötti térrészt elhagyva az elektronokra már csak a mágneses mezőtől származó (jó közelítéssel függőleges irányúnak tekinthető), $evB\sin\phi$ nagyságú Lorentz-erő hat. Az ettől származó gyorsulás (a relativisztikus tömegnövekedést is figyelembe véve)

$$a = evB\sin\phi \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m},$$

a függőleges elmozdulás tehát (a feladat szövegében megadott 3. és 5. ábrák jelöléseit használva)

$$\frac{y}{2} = \frac{a}{2}\tau^2,$$

ahol $\tau = s/v$ a repülés ideje. Másrészt viszont v kifejezhető a ϕ szöggel (lásd az előző alkérdést), így végül y és ϕ között az alábbi összefüggést kapjuk:

$$y^2 = \left(\frac{esB\sin\phi}{m}\right)^2 \left[\left(\frac{Bst\sin\phi}{V}\right)^2 - \left(\frac{s}{c}\right)^2\right].$$

Ezek után ha ábrázoljuk milliméterpapíron $\left(\dfrac{y}{Bs\sin\phi}\right)^2$-t $\left(\dfrac{Bst\sin\phi}{V}\right)^2$ függvényében, közelítőleg egyenest kell kapjunk, melynek meredeksége $(e/m)^2$, tengelymetszete pedig $-\left[es/(mc)\right]^2$. Mindkét mennyiség leolvasható a grafikonról, és a keresett fajlagos töltésre a meredekségből $e/m = 1{,}70 \cdot 10^{11}$ C/kg, a tengelymetszetből pedig $e/m = 1{,}68 \cdot 10^{11}$ C/kg adódik. (Az elektron fajlagos töltését elsőként *J.J.Thomson* angol fizikus mérte meg 1897-ben, mai „hivatalosan elfogadott” értéke $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg.)

3. feladat. *Gravitációs hullámok és a gravitáció hatása a fényre.*

A) a) A rudak szabad végeinek rezgését leíró $\Delta x_t \propto e^{-\mu t}$ függvényben az exponenciális faktor 50 s alatt 20 %-kal csökken, tehát $0{,}8 = e^{-\mu \cdot 50\,\mathrm{s}}$, ahonnan $\mu = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$.

b) A longitudinális hullámok sebessége az alumínium megadott anyagi állandóiból számítható: $v = \sqrt{E/\varrho} = 5100$ m/s. Tudjuk továbbá, hogy az egyik végén rögzített, a másik végén szabadon mozgó rúd longitudinális alaprezgésénél a rúd hossza a hullámhossz negyede, vagyis $\lambda_{\text{rúd}} = 4\ell = 4$ m, alaprezgés frekvenciája tehát $f = v/\lambda = 1{,}3$ kHz, körfrekvenciája pedig $\omega = 2\pi f = 8{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$.

c) A rudak hossza és a rezgések frekvenciája fordítottan arányos egymással: $\ell \cdot f = v/4 =$állandó, vagyis

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{\Delta f}{f} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1{,}3 \cdot 10^3} = 3{,}8 \cdot 10^{-6}.$$

A két (közelítőleg 1 méteres) rúd hosszának különbsége tehát 3,8 mikron.

d) A gravitációs térerősség (gravitációs gyorsulás) hatására egy ℓ hosszúságú, ϱ sűrűségű rúd rögzített végénél $\sigma = \ell g \varrho$ rugalmas feszültség ébred, a szabad végénél nulla a feszültség, az átlagos feszültség tehát $\overline{\sigma} = \dfrac{1}{2}\ell g \varrho$. Ennek hatására a rúd deformációja

$$\frac{\ell\,\overline{\sigma}}{E} = \frac{\ell^2 \varrho}{2E} \cdot g,$$

amelynek kicsiny megváltozása a gravitációs térerősség kicsiny Δg megváltozásának hatására

$$\Delta\ell = \frac{\ell^2 \varrho}{2E} \cdot \Delta g.$$

e) A $\Delta\ell = 656\ \text{nm} \cdot 10^{-4} = \dfrac{\ell^2 \varrho}{2E} \cdot \Delta g$ összefüggésből a megadott számadatokkal a szükséges rúd hosszára $\ell \approx 2 \cdot 10^8$ m adódik. Ilyen hosszú (csillagászati méretű) rúd nyilvánvalóan nem készíthető! A számítás eredménye mindenesetre tanulságos, rávilágít arra a tényre, hogy a gravitációs hullámok kísérleti kimutatása technikailag igen nehéz feladat, nem csoda, hogy mind ez ideig még nem sikerült.

Megjegyzés. A fenti becslésnél azt tételeztük fel, hogy a gravitációs térerősség egy igen kicsit megváltozik, majd stabilan a megváltozott érték marad; emiatt az egyik rúd szabad vége kicsit elmozdul. A reálisan várható mérési elrendezésben Δg csak egy nagyon rövid ideig különbözik nullától (hiszen a gravitációs hullámok fénysebességgel terjednek), s csak „meglökik" a rudat, amely (kicsiny csillapítás esetén) az alaprezgés frekvenciájával hosszú ideig tartó rezgésbe kezd. A tervezett mérésekben ennek a rezgésnek közvetett hatásait szeretnék kimutatni.

B) *Gravitációs mező hatása a fény terjedésére az űrben*

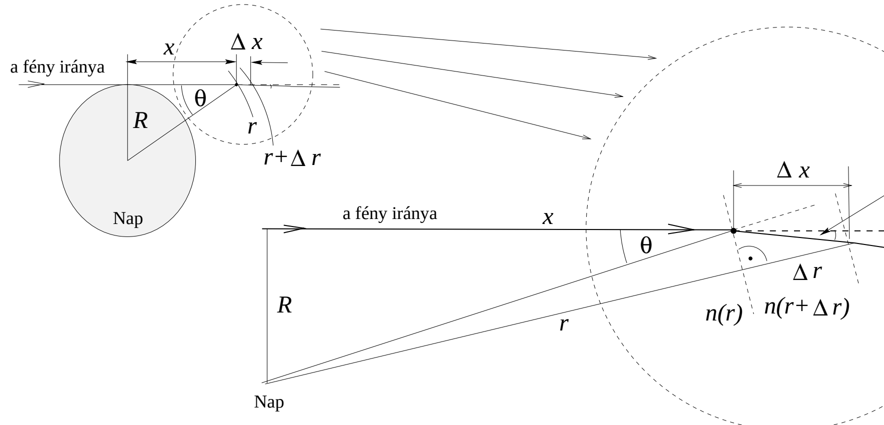
a) A $hf = mc^2$ összefüggésből az f frekvenciájú foton „ekvivalens tömege" $m = hf/c^2$. A Nap felszínéről induló és onnan nagyon messze eltávolodó foton mozgási energiája a gravitációs helyzeti energia változása miatt $hf' = hf - GmM/R$ értékű lesz, ahonnan a bizonyítandó $f' = f(1 - GM/Rc^2)$ formulát kapjuk.

b) Ha a gravitációs mező jelenléte a Nap középpontjától r távolságban a frekvenciákat és a távolságokat $(1 - GM/Rc^2)$ arányban csökkenti, az időtartamokat pedig ugyanilyen mértékben növeli, akkor ez a fény terjedési sebességének $(1 - GM/Rc^2)^2$ arányú csökkenéséhez vezet. Ezek szerint az effektív törésmutató

$$n_r = \frac{c}{c'} = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \approx 1 + 2 \cdot \frac{GM}{rc^2},$$

vagyis a kérdéses α állandó számértéke 2.

c) A Nap szélét éppen érintő fénysugár a gravitáció hatására – a fentebb kiszámított, helyről helyre változó effektív törésmutató miatt – fokozatosan elgörbül. Osszuk fel a fénysugár pályáját a Napot érintő pontjától mért x távolság függvényében kicsiny szakaszokra. Az x és $x + \Delta x$ radiális távolsággal jellemzett pontok közötti gömbhéjat tekintsük optikailag homogén, $n(r+\Delta r)$ törésmutatójú közegnek, az alatta levő réteget pedig $n(r)$ törésmutatójúnak (lásd a *3. ábrát*)! A réteg alsó határfelületére eső fénysugár a Snellius–Descartes-törvénynek megfelelően megtörik, eredeti irányához



képest igen kicsiny $\Delta\varphi$ szöggel eltérül:

3. ábra

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \Delta\varphi)} = \frac{n(r + \Delta r)}{n(r)}.$$

Használjuk ki, hogy $\Delta\varphi$ és $\Delta r = \Delta x \cos\theta$ kicsiny mennyiségek, továbbá hogy $n(r) \approx 1$ miatt a fény pályája alig tér el az egyenestől, így

$$\sin(\theta + \Delta\varphi) \approx \sin\theta + \Delta\varphi\cos\theta$$

és

$$n(r+\Delta r) - n(r) = \frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right) \approx -\frac{2GM}{r^2c^2}\,\Delta r,$$

ahonnan a szögeltérülésre

$$\Delta\varphi = \frac{2GM}{r^2c^2}\,\mathrm{tg}\,\theta \cdot \Delta r = \frac{2GMR}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

adódik. összegezve (integrálva) ezt az összefüggést (az x változóra teljes tartományára) megkapjuk a fény teljes eltérülését:

$$\varphi = \frac{2GMR}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{4GM}{Rc^2} \approx 8{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ radián.}$$

Megjegyzés. A feladat megoldása során követett gondolatmenet a klasszikus newtoni gravitációelmélet fogalmait használja (némi relativisztikus korrekcióval). Ez a leírás nem minden esetben tükrözi helyesen a kísérletileg megfigyelt tényeket; erre mai tudásunk szerint csak az Einstein-féle általános relativitáselmélet képes, melynek matematikai apparátusa és fogalomrendszere azonban sokkal bonyolultabb annál, semhogy középiskolás versenyfeladatok között felhasználható volna. A diákolimpián szereplő (a gravitációs fényelhajlást tárgyaló) feladatban a „félklasszikus" gondolatmenettel kapott formula megegyezik az általános relativitáselmélet (kísérletek által is pontosan igazolt) jóslatával, a gravitációs hullámok Einstein-féle elmélete azonban sokkal összetettebb, mint azt a versenyfeladat megoldása alapján vélhetnénk.

Gnädig Péter

Kísérleti forduló

CD-ROM spektrométer.

Ebben a feladatban a versenyzőknek egy pontosan lépésekre tagolt, részletesen leírt mérést kellett végrehajtaniuk. A kihívás inkább a mérés gyors és pontos elvégzése volt. A meghajlított CD-darabbal könnyen elő lehetett állítani az elsőrendű spektrumot, és a fotóellenállás fókuszsíkban való mozgatásával a karakterisztikát (a vezetőképességet a hullámhossz függvényében) sem volt nehéz kimérni. A hullámhosszakat a megadott rácsállandóból és a geometriai adatokból lehetett kiszámítani. Bár csak a látható tartományban kellett mérni, és így a színek támpontot adtak a hullámhosszak körülbelüli értékére, mégis előfordult nagyságrendi hiba is a hullámhosszak meghatározásánál.

A mérés másik felében ezt a kimért, elsődleges karakterisztikát kellett korrigálni, hiszen a spektrum létrehozásához használt izzó nem azonos intenzitással sugároz a különböző hullámhosszakon. Először azt kellett igazolni, hogy az izzó abszolút fekete testként viselkedik: ehhez az izzólámpa feszültsége és árama között fennálló $U^3 \propto I^5$ összefüggés kísérleti igazolására volt szükség.

Ezután az izzó „meleg-" és „hideg-ellenállása" alapján meg kellett mérni az izzószál hőmérsékletét. (A volfrám fajlagos ellenállásának hőmérsékletfüggését megadták.) A feladatot az tette bonyolultabbá, hogy az izzó ellenállása szobahőmérsékleten olyan kicsi, hogy a rendelkezésre álló műszerekkel nem lehetett elegendő pontossággal megmérni. Ezért egy „közvetítő" izzót használhattak a versenyzők: egy közbülső hőmérsékleten, ahol a vizsgált izzó még jól mérhető ellenállású, a szín alapján (vizuálisan) azonos hőmérsékletűre kellett beállítani egy nagyobb ellenállású izzót. Ennek viszont a hideg-ellenállását is meg lehetett mérni, amiből a közbülső hőmérséklet, és így az eredeti izzó eredeti hőmérséklete is számolható volt. Ezután már csak ki kellett választani a megadott Planck-görbékből az izzószál hőmérsékletének megfelelőt, ezzel korrigálhatták a kimért karakterisztikát.

Mágneses korong.

Ez a mérés, az előző ellentéteként, a versenyzőknek szinte teljes szabadságot adott abban, hogy mit és hogyan mérnek. Célszerű volt először csak játszani az eszközzel: különböző szögeknél, különböző magasságokból lecsúsztatni a korongot (hol egyik, hol másik – gyengébben mágneses – oldalán), és közben figyelni a mozgást. Az rögtön látszott, hogy az örvényáramú fékezés miatt a test sebessége előbb-utóbb állandó lett. (Sajnos ezt a magyar versenyzők nyilvánvalónak tekintették, és nem ellenőrizték mérésekkel, hogy különböző esetekben mekkora út megtétele után lesz a sebesség tényleg állandó.) A feladat szerint fel kellett állítani egy elméleti hipotézist arra, hogyan függ a mágneses fékezőerő a korong állandósult sebességétől és a lejtő szögétől. (Természetesen ez a két mennyiség se független egymástól.) Ezután ezt a hipotézist kellett megfelelő mérésekkel igazolni!

A mérés elvégzése közben persze érdemes volt néhány „apró" dologra figyelni (például az időmérő szerkezet telepe feszültségének folyamatos ellenőrzése), de a feladat lényege a jó koncepció – hipotézis és mérési eljárás – megtalálása volt. Volt aki tudta vagy ráérzett a fékezőerő és a sebesség közti lineáris kapcsolatra, másvalaki $F \propto v^n$ alakú erőt feltételezett, és n értékét mérte. Olyan (magyar) versenyző is volt, aki $F \propto v^2$ kapcsolatot feltételezett, ezt próbálta igazolni, és amikor az eredményei nem egyeztek a várakozásával, akkor módosította a hipotézisét (és így aranyérmet nyert).

Természetesen ennek a feladatnak nem volt könnyű a javítása és a pontozása, hiszen nem lehetett előre látni, milyen utakat választanak a versenyzők. Ezzel együtt sokan örömmel fogadtuk ezt az elmúlt évek olimpiáihoz képest szokatlan, gondolkodtató, „nyitott" feladatot.