Ha egy zárt vezetékben elektromos áram folyik, a vezeték közelében mágneses mező alakul ki. Amennyiben az áramerősség időben változó, a mágneses mező (és annak fluxusa) is változik. A változó mágneses fluxus a vezetékben feszültséget indukál, ez az *önindukció* ismert jelensége. A mágneses indukció vektora minden pillanatban és mindenhol arányos a vezetékben folyó áram $I(t)$ pillanatnyi értékével[1]Feltételezzük, hogy az áram változásának ideje sokkal hosszabb, mint amennyi idő alatt a fény a vezeték egyik szélétől a másik széléig eljuthat. Ha ez a feltétel nem teljesül, az itt leírt érvelés érvényét veszti., és ugyanez érvényes a vezető egészére jutó mágneses fluxusra is: $\Phi(t) \propto I(t)$.

A Faraday-féle indukciótörvény szerint az indukált elektromotoros feszültség a mágneses fluxus változási sebességének (-1)-szeresével egyenlő, ez pedig arányos az áram változási sebességével[2]A változási sebesség jelölésére a Δt időtartamra vonatkoztatott átlagsebességet tüntettük fel. Ha a pillanatnyi sebesség fogalmát kívánjuk használni, akkor (itt és a továbbiakban) az $I'(t)$ deriválttal kell számolnunk.:

$$U^{\mathrm{ind}}(t) = -L\frac{\Delta I(t)}{\Delta t}.$$

Az L arányossági tényező (amely a fenti előjelválasztás mellett mindig pozitív) a kérdéses vezeték (tekercs) önindukciós együtthatója. L nagysága a vezeték geometriai adataitól függ, s a legegyszerűbb esetek kivételével csak bonyolult számítással, vagy méréssel határozható meg.

Amennyiben az időben változó erősségű árammal átjárt (1-es jelű) vezeték (tekercs) közelében egy másik (2-es jelű) vezeték (tekercs) is található, a változó mágneses fluxus abban is elektromotoros feszültséget indukál, és ez a feszültség ugyancsak az áramerősség változási sebességével arányos:

$$U^{\mathrm{ind}}_{1\to 2}(t) = -M\frac{\Delta I_1(t)}{\Delta t},$$

ahol M-et az 1-es vezetéknek a 2-esre vonatkoztatott ***kölcsönös indukciós együtthatójának*** nevezik.

Természetesen a jelenség fordított irányban is működik: ha a 2-es vezeték I_2 áramerőssége változik időben, az 1-es vezetékben

$$U^{\mathrm{ind}}_{2\to 1}(t) = -M'\frac{\Delta I_2(t)}{\Delta t},$$

ahol M' az 1-es vezetéknek a 2-esre vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója.

Több vezeték esetén az i-edik áramkörben indukálódó teljes elektromotoros feszültség valamennyi vezeték (beleértve saját magát is) járulékának összegeként áll elő:

$$U^{\mathrm{ind}}_i = -\sum_k L_{i,k}\frac{\Delta I_k(t)}{\Delta t},$$

ahol $L_{i,\,k}$ a k-adik vezetéknek az i-edikre vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója, $L_{k,\,k}$ pedig a k-adik vezeték (tekercs) önindukciós együtthatója. (Korábbi jelöléseink ebben az írásmódban: $L_1 = L_{1,\,1}$; $L_2 = L_{2,\,2}$; $M = L_{2,\,1}$ és $M' = L_{1,\,2}$.)

A kölcsönös indukciós együtthatók – az önindukciós tényezőkhöz hasonlóan – általában csak bonyolult matematikai eljárással, vagy tapasztalati úton, mérésekkel határozhatók meg. Előfordul, hogy két vezeték kölcsönös indukciós tényezői közül az egyiket nagyon nehéz kiszámítani, a másikat pedig viszonylag egyszerű meghatározhatjuk. Ilyen esetekben különösen hasznos lenne, ha létezne valamilyen kapcsolatot az „oda-” és a „visszafele” érvényes indukciós tényezők között. Annyit mindenesetre megállapíthatunk, hogy a vezetékeket eltávolítva egymástól a kölcsönös indukció nagysága gyors ütemben (a részletes számítások szerint a távolság köbével fordított arányban) csökken.

A kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriája

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy két tetszőleges alakú és tetszőleges térbeli helyzetű zárt vezetékre fennáll a kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriája:

$$M = M', \qquad \text{általánosabban:} \qquad L_{i,\,k} \equiv L_{k,\,i}.$$

Az állítás igazolásához energetikai megfontolásokat fogunk alkalmazni. Tekintsük az *1. ábrán* látható két ideális (elhanyagolható ellenáású) tekercsből és egy külső terhelő ellenállásból álló áramkört. (Ez lényegében egy transzformátor, de nem tételezzük fel, hogy a tekercsek közös vasmagon lennének, sőt, még azt sem, hogy egymáshoz nagyon közel helyezkednének el.)

Kapcsoljunk az 1-es (primer) tekercsre valamekkora U_0 effektív értékkel jellemzett, ω körfrekvenciájú váltófeszültséget, a másik (szekunder) tekercset pedig zárjuk le egy R nagyságú terhelő ellenállással. A kölcsönös indukció miatt a

11

22

primer tekercs váltakozó árama a szekunder tekercsben feszültséget indukál, ez áramot indít benne, amely hatására a terhelő ellenálláson egységnyi idő alatt valamekkora P_{ki} hő fejlődik. Ezt a hőteljesítményt a primer oldalon betáplált P_{be} hasznos teljesítmény fedezi, ezt (a primer feszültség és áramerősség, valamint a fázistényező szorzatát) méri a villanyóra. Az energiamegmaradás tétele szerint fenn kell álljon, hogy

$$P_{\text{be}} = P_{\text{ki}}.$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen megszorítást jelent a rendszer paramétereire nézve ezen „energia-mérlegegyenlet" teljesülése.

Tételezzük fel, hogy a primer tekercsben I_1 effektív értékű áram folyik. Ennek az áramnak a változási sebessége $I_1\omega$, hatására a szekunder tekercsben

$$U_{1\to 2} = MI_1\omega$$

nagyságú, az I_1 áram fázisához képest $90°$-kal siető feszültség indukálódik. Forgóvektoros ábrázolásban a fázisviszonyokat a *2. ábrán* látható módon szemléltethetjük.

Az indukált $U_{1\to 2}$ feszültség hatására az L_2 önindukciójú, R ellenállással terhelt szekunder tekercsben

$$I_2 = \frac{U_{1\to 2}}{\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}} = \frac{MI_1\omega}{\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}}$$

nagyságú áram fog folyni, melynek fázisa a *3. ábrán* látható φ szöggel késik az $U_{1\to 2}$ feszültséghez képest. A terhelő (ohmikus) ellenálláson leadott hőteljesítmény:

$$P_{\text{ki}} = I_2^2 R = \frac{M^2 I_1^2 \omega^2 R}{R^2 + L_2^2\omega^2}.$$

Számítsuk ki a bemenő teljesítményt is! A primer áram nagyságát ismerjük, a primer feszültséget pedig viszonylag egyszerűen meg tudjuk határozni. A primer tekercsben indukálódott feszültség két tag összegeként áll elő: egyrészt az önindukcióból származó $U_{1\to 1}^{\text{ind}} = L_1\omega I_1$ nagyságú, másrészt a szekunder tekercs által indukált

$$U_{2\to 1}^{\text{ind}} = M'\omega I_2$$

nagyságú feszültségkomponensekből. Ezeket a feszültségeket és U_0-t megfelelő fázissal összegezve nullát kell kapnunk, hiszen a körben nincs ohmos ellenállás. A primer tekercsre kapcsolt váltófeszültség teljesítménye tehát $-U_{1\to 1}^{\text{ind}}$ és $-U_{2\to 1}^{\text{ind}}$ (fázishelyesen számolt) összegének teljesítménye, vagy ami ezzel egyenértékű, $-U_{1\to 1}^{\text{ind}}$ és $-U_{2\to 1}^{\text{ind}}$ külön-külön (fázishelyesen) kiszámolt a teljesítményének összege. Az önindukcióból származó feszültség az I_1 áramhoz képest $90°$-ot siet, a teljesítménye tehát teljesen meddő, a „villanyszámla" szempontjából figyelmen kívül hagyható. Az $U_{2\to 1}^{\text{ind}}$ feszültség viszont az I_2-höz képest $90°$-ot siet (lásd a *2. ábrát*), az I_1 áramtól tehát $180° - \varphi$ fázisszöggel tér el, így a bemenő teljesítmény

$$P_{\text{be}} = -U_{2\to 1}^{\text{ind}} I_1 \cos(180° - \varphi) = M'\omega \frac{MI_1\omega}{\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}} \frac{RI_1}{\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}} = \frac{MM' I_1^2 \omega^2 R}{R^2 + L_2^2\omega^2}.$$

A bemenő és a kimenő teljesítmények egyenlőségéből ($M \neq 0$ esetén) éppen a bizonyítandó $M = M'$ szimmetria-reláció adódik.[3]Ha M történetesen nulla lenne, akkor a tekercsek felcserélése és az egész számítás megismétlése után $M' = 0$ adódik, tehát még ebben a szélsőséges esetben is egyenlő a kétféle kölcsönös indukciós tényező.

Egy egyszerű példa

A kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriájának ismerete bizonyos esetekben lényegesen egyszerűsítheti számításainkat. Oldjuk meg például a következő feladatot:

Egy R sugarú körvezető közepén, vele egy síkban, koncentrikusan elhelyezve egy r sugarú ($r \ll R$) másik körvezető található (4. ábra). *A kisebb körvezetőben az áramerősséget t_0 idő alatt nulláról I_0 értékre növeljük. Mekkora feszültség indukálódik ezalatt a nagyobb körben?*

Megoldás. Az indukált feszültséget a kis körvezetőnek a nagyra vonatkoztatott kölcsönös indukciója határozza meg. Ezt a mennyiséget nem könnyű kiszámítani, hiszen a kis körvezető mágneses tere a nagyobb kör belsejében erősen inhomogén, helyről helyre számottevően változik.

Sokkal könnyebb meghatározni a nagy körvezetőnek a kicsire vonatkoztatott kölcsönös indukciós tényezőjét, hiszen a nagy kör mágneses mezője a kis körvezető helyén jó közelítéssel homogénnek tekinthető, nagysága pedig

$$B \approx \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

33

Ennek a mezőnek a $r^2\pi$ területű kis körlapon

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R} I(t)$$

a mágneses fluxusa, így az indukált elektromotoros feszültség:

$$U^{\rm ind}(t) = -\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 r^2\pi}{2R}\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = -M\frac{\Delta I(t)}{\Delta t},$$

vagyis a kérdéses kölcsönös indukciós együttható:

$$M = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R}.$$

Az előző levezetett szimmetriatulajdonság miatt a kis körvezetőnek a nagyra vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója is ugyanekkora ($M' = M$), a feladatban kérdezett feszültség tehát:

$$U = \frac{\mu_0 r^2\pi}{2R}\frac{I_0}{t_0}.$$

Mekkora lehet két vezető kölcsönös indukciója?

Vajon milyen határok között változhat két vezető kölcsönös indukciója? Ha a vezetők elegendően messze vannak egymástól, akkor M nyilván tetszőlegesen kicsivé válhat. De vajon milyen nagy lehet maximálisan a kölcsönös indukció értéke? Megmutatjuk, hogy M abszolút értéke nem lehet akármilyen nagy, legfeljebb akkora, mint a két vezető önindukciós együtthatóinak mértani közepe:

$$|M| \le \sqrt{L_1 L_2}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget ugyancsak energetikai megfontolások segítségével láthatjuk be.

Végezzünk el egy gondolatkísérletet! Vegyünk egy jó nagy kapacitású kondenzátort, és töltsük fel Q töltéssel a kapacitásának megfelelő $U_0 = Q/C$ feszültségre. Kapcsoljuk rá erre a kondenzátorra a vizsgálandó két vezetőből álló „ideális transzformátor” primer körét, a szekunder körét pedig zárjuk rövidre (*5. ábra*). Könnyen beláthatjuk, hogy mindkét körben az idővel egyenes arányban növekvő erősségű áram indul meg, hiszen a körök feszültsége időben állandó (U_0, illetve nulla), következésképpen az áramerősségek változási sebessége is állandó kell legyen:

$$I_1(t) = a_1 \cdot t, \qquad \text{illetve} \qquad I_2(t) = a_2 \cdot t.$$

(Felhasználtuk, hogy a kondenzátor kapacitása jó nagy, ezért egy rövid idő alatt a rajta levő töltés nem változik meg számottevően.) Írjuk fel az egyes tekercsekben indukálódó feszültségeket, majd ezek segítségével a primer és a szekunder körben Kirchhoff huroktörvényét:

$$\frac{Q}{C} - L_1 a_1 - M a_2 = 0,$$
$$-M a_1 - L_2 a_2 = 0.$$

(Kihasználtuk korábbi eredményünket, miszerint $M = M'$.) A fenti egyenletrendszert megoldva a primer tekercs áramerősségére

$$I_1 = \frac{L_2 Q t}{C} \cdot \frac{1}{L_1 L_2 - M^2}$$

adódik. Ha ez az áram $Q > 0$ esetén negatív mennyiség lenne (vagyis a pozitív töltésű lemezhez kapcsolódó vezetéken nem a lemeztől el, hanem éppen a lemez felé folyna az áram), akkor a kondenzátor töltése időben egyre nőne. A kondenzátor ebben az esetben „magától” feltöltődne, elektrosztatikus energiája egyre növekedne. Ez ellentmond az energiamegmaradás általános törvényének, következésképpen I_1/Q nemnegatív kell legyen. Ez a követelmény viszont csak akkor teljesül, ha

$$L_1 L_2 - M^2 \ge 0,$$

s éppen ezt akartuk belátni.

Két, egymással elektromágneses csatolásban levő tekercs kölcsönös indukciója $-\sqrt{L_1 L_2}$ és $+\sqrt{L_1 L_2}$ közötti értékeket vehet fel. Emiatt célszerű M-et $k\sqrt{L_1 L_2}$ alakban felírni, ahol k a tekercsek (vezetékek) csatolásának erősségére jellemző dimenziótlan szám ($-1 \le k \le +1$). Ha pl. közös vasmagra tekercselünk két tekercset, akkor bármelyikük által keltett mágneses fluxus gyakorlatilag teljes egészében áthalad a másik tekercsen is; ilyenkor a csatolás erős, $k = \pm 1$ (az előjel a tekercselés irányától függ). Egy további példa: egy nagyobb átmérőjű szolenoid belsejébe egy másik, kisebb szolenoidot helyezünk. A kölcsönös indukció ekkor is könnyen kiszámítható, s a csatolási tényező $|k| = \sqrt{A_2/A_1} < 1$ lesz, ahol A_2 a belső tekercs keresztmetszete, A_1 pedig a külsőé.

Hatás–ellenhatás (mechanikai analógia)

A kölcsönös indukciók szimmetriáját (vagyis azt az összefüggést, hogy az egyik tekercsnek a másikra való indukciós hatása ugyanolyan mértékű, mint a másik tekercsnek az előbbire való visszahatása) energetikai megfontolások segítségével láttuk be. Hasonló helyzet klasszikus (newtoni) mechanikában is előfordul, és ott is hasonló jellegű érveléssel – energetikai megfontolások segítségével – láthatjuk be, hogy egy zárt rendszer két része közti belső erőhatások (erő és ellenerő) azonos nagyságú és ellentétes irányú vektorok kell legyenek.

Tekintsünk két testet, melyek kezdetben állnak, majd az egymásra kifejtett erőhatások következtében egy egyenes mentén gyorsulni kezdenek (*6. ábra*). Ha m_1 és m_2 jelöli a testek tömegét, F és F' pedig a rájuk ható belső erőket, akkor a gyorsulásuk $a_1 = F/m_1$ és $a_2 = F'/m_2$, valamely kicsiny t idő alatt elért sebességük pedig $v_i = a_i t$ $(i = 1, 2)$. A két test mozgási energiájának megváltozása tehát t idő alatt

$$\Delta E_{\text{álló}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{Ft}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{F't}{m_2}\right)^2.$$

(Az „álló” kifejezés arra utal, hogy ezt az energiaváltozást abban a koordináta-rendszerben észleljük, melyhez viszonyítva a testek kezdetben álltak.)

Képzeljük most el, hogy az egész jelenséget egy $-v_0$ sebességgel haladó vonatból figyeljük. Innen szemlélve a következőket mondhatjuk: a két test mozgási energiája kezdetben

$$E_0 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}m_2 v_0^2$$

volt, t idővel később pedig

$$E_t = \frac{1}{2}m_1\left(v_0 + \frac{Ft}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_0 - \frac{F't}{m_2}\right)^2$$

lett, a rendszer mozgási energiának megváltozása tehát

$$\Delta E_{\text{mozgó}} = E_t - E_0 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{Ft}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{F't}{m_2}\right)^2 + (F - F')tv_0.$$

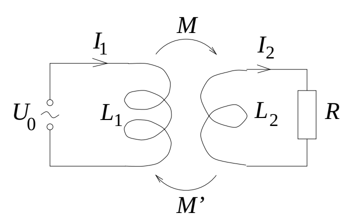
A kétféle megfigyelő által észlelt mozgási energia változásnak meg kell egyeznie egymással, hiszen ΔE-t a két test távolságától függő helyzeti energia (pl. rugalmas energia, vagy elektrosztatikus energia) megváltozása fedezi, esetleg kémiai energia felszabadulásából (ágyú elsütéséből) származik; ezek mindegyike az álló és a mozgó megfigyelő számára ugyanakkora. $\Delta E_{\text{mozgó}}$ és $\Delta E_{\text{álló}}$ fentebb kiszámított értékei viszont csak akkor lesznek egyenlőek, ha

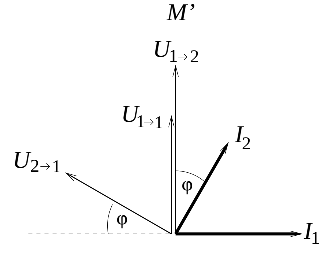
$$F = F',$$

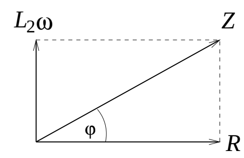
vagyis a hatás és ellenhatás erői egyforma nagyok.

Nem állítjuk, hogy ezzel az érveléssel „levezettük” Newton III. törvényét, hiszen felhasználtuk az energiamegmaradás tételét és a vonatkoztatási rendszerek egyenértékűségét, s ezek legalább olyan fontos részei a klasszikus mechanikának, mint a hatás–ellenhatás törvénye. Nem szándékozunk fontossági sorrendet megállapítani az említett fizikai törvények között, csupán arra akarjuk felhívni a figyelmet, hogy ezek a törvények nem teljesen függetlenek egymástól, valahol mélyen kapcsolat van közöttük. Néha az egyik, néha pedig egy másik fizikai törvény használata a célszerűbb, tartozzon a vizsgált jelenség (megoldandó feladat) akár a klasszikus mechanika, akár pedig az elektromágneses indukció körébe.

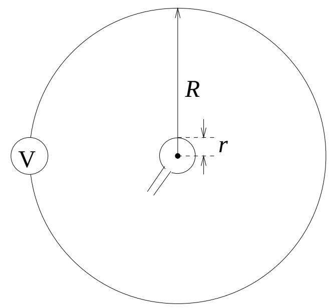
Gnädig Péter



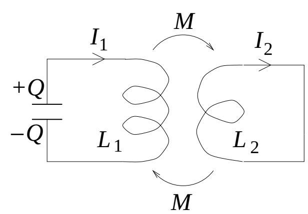




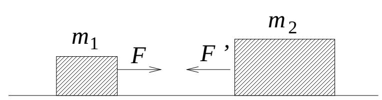
$L_2\omega$
Z
φ
R



R
r
V



M
I_1
I_2
$+Q$
$-Q$
L_1
L_2
M



m_1
m_2
F
F'