

## Az elméleti feladatok megoldása <sup>1</sup>

**1. feladat. a)** A hasáb gördülése közben, az egymást követő becsapódásokkor nagy erők lépnek fel a lejtővel érintkező él (pl. az *1.1 ábrán*  $A$ -val jelölt él) mentén. Ezek az erők pillanatszerűen lecsökkentik a hasáb érintés előtti  $\omega_i$  szögsebességét a becsapódást közvetlenül követő  $\omega_f$  értékre. Észrevehetjük azonban, hogy a hasábra ható erők nem változtatják meg az  $A$  pontra számítható perdületet, ami saját- és pályaperdületből áll:

$$I\omega_i + Ma \cdot \frac{1}{2}a\omega_i = I\omega_f + Ma \cdot a\omega_f.$$

Az  $I$  tehetetlenségi nyomaték megadott értékének behelyettesítése után azonnal megkapjuk az eredményt:

$$s = \frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{11}{17}.$$

---

<sup>1</sup> A feladatok szövege múlt havi számunkban olvasható.

*1.1. ábra*

**b)** A test  $K$  mozgási energiája az ütközés előtt is és a becsapódást követően is a hasáb egy-egy oldaléle körüli forgásból számítható. A mozgási energiák aránya:

$$r = \frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}I'\omega_f^2}{\frac{1}{2}I'\omega_i^2} = \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2} = s^2 = \frac{121}{289}.$$

c) A hasáb következő éle akkor érinti a lejtőt, ha energiája elegendő ahhoz, hogy súlypontját „átemelje” pályájának legmagasabb pontján. Az 1.2 ábráról leolvasható, hogy a súlypont emelkedése  $a - a \cos(30^\circ - \theta)$ , ahol  $\theta$  a lejtő hajlásszöge. Ha az érintés előtti minimális energiát  $\delta \cdot Mga$  alakban írjuk fel, akkor a kritikus esetre a következő egyenlet adható:

$$Mga [1 - \cos(30^\circ - \theta)] = r\delta \cdot Mga, \quad \text{amiből} \quad \delta = \frac{1 - \cos(30^\circ - \theta)}{r}.$$

1.2. ábra

d) Tegyük fel, hogy a hasáb úgy mozog, hogy az érintés előtti mozgási energiája már felvette az állandósult  $K_{i,0} = \kappa \cdot Mga$  értéket. Az állandósult mozgásnak az a feltétele, hogy a becsapódásonként a mozgási energia vesztesége éppen egyenlő legyen az egy-egy lépésre eső helyzeti energia csökkenéssel. Az 1.3 ábra alapján:

$$Mga \sin \theta = (1 - r)\kappa \cdot Mga, \quad \text{azaz} \quad \kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}.$$

### 1.3. ábra

e) Minél kisebb egy lejtő hajlásszöge, annál kisebb egy-egy lépésben a hasáb helyzeti energiájának csökkenése, másrészt annál nagyobb a súlypont emelkedéséből származó „fékező korlát”. A kettő egyenlősége (a két előző alkérdés eredményének egybevetése) adja meg az állandósult mozgásra még alkalmas  $\theta_0$  minimális hajlásszöget:

$$\frac{\sin \theta_0}{1-r} = \frac{1 - \cos(30^\circ - \theta_0)}{r},$$

amiből a kérdéses szögre meglepően kicsiny érték,  $\theta_0 = 6,6^\circ$  adódik.

*Megjegyzés.* A feladat a) része úgy is megoldható, hogy felírjuk a a becsapódáskor bekövetkező sebesség- és szögsebesség-változásokat a fellépő erők és forgatónyomatékok segítségével. Ezek az erők olyan nagyok, hogy mellettük a hasábra ható nehézségi erő elhanyagolható.

**2. feladat. a)** A jég megolvasztásához szükséges hőt a Föld mélyéből érkező hóáram fedezi:  $L_j \rho_j A d = J_Q A t$  ( $t = 1$  év), amiből az évente megolvadó jégréteg vastagsága:  $d \approx 6$  mm.

**b)** A jégtábla alján a nyomás a külső légnyomás ( $p_0$ ) és a jég súlyából származó hidrosztatikai nyomás összege:

$$p_j(x) = p_0 + \rho_j g [y_2(x) - y_1(x)] = p_0 + \rho_j g h_0 + \rho_j g x (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha).$$

A jégtábla alján vékony vízréteget képzelhetünk el, ami akkor nem folyik egyik irányba sem, ha a felette lévő jégréteg nyomása megegyezik a víz nyomásával.  $x = 0$ -nál a víz nyomása  $p_j(0) = p_0 + \rho_j g h_0$ , magasabban pedig a hidrosztatikai nyomásnak megfelelően kisebb:

$$p_v(x) = p_0 + \rho_j g h_0 - \rho_v g x \operatorname{tg} \alpha.$$

A víz és a jég nyomása akkor lesz  $x$ -től függetlenül egyenlő, ha  $\rho_j (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = -\rho_v \operatorname{tg} \alpha$ , azaz

$$s = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\rho_j - \rho_v}{\rho_j} = -0,091.$$

Egyensúlyi állapotban tehát a jégréteg felső felületének süllyednie kell, ha az alatta lévő talaj emelkedik (2.1 ábra).

Ha a sziklatalaj menetét az  $y_1 = 0,8x$  egyenlet írja le, továbbá a jég vastagsága az  $x_0 = 0$  helyen  $h_0 = 2$  km, akkor a jégfelszint leíró egyenlet:  $y_2 = 2 \text{ km} - 0,073x$  (2.2 ábra). A két egyenes az  $x_P = 2,3$  km,  $y_P = 1,8$  km koordinátájú pontban metszi egymást.

*2.1. ábra*

*2.2. ábra*

c) Mivel a víz sűrűsége nagyobb a jégénél, így olvadáskor a keletkezett víz kisebb térfogatot foglal el, és a jégtábla felszínén (éppen a megolvadt kúp alakú víztömeg felett) fordított kúp alakú bemélyedés jön létre. A behorpadás

legnagyobb  $h$  mélységét a  $b)$  alkérdésre adott válasz alapján számíthatjuk ki:

$$h = |r \operatorname{tg} \beta| = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_j} r \operatorname{tg} \alpha \approx 91 \text{ m.}$$

A felszínen kialakult bemélyedést a *2.3 ábra* mutatja.



d) A jégréteg aljára behatoló forró magma miatt nagy mennyiségű jég olvad meg. A folyamatot három lépésben képzelhetjük el. Először a magma-benyomulás helyén lévő  $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$  térfogatú jég olvad meg, és a keletkező víz elfolyik. Második lépésben fordított kúp alakú benyomódás jön létre a jégréteg felszínén, miközben a magma-benyomulás felett keletkező víz folyamatosan elfolyik. Ez a szakasz a nyomás-egyensúly kialakulásáig tart, a horpadás  $h_2$  mélységét az előző alkérdésekre adott válaszok alapján számíthatjuk ki:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 \frac{\Delta \varrho}{\varrho_j}.$$

Feltételezhetjük, hogy a magma-benyomulás anyaga még ekkor is igen meleg, tehát a magma további jégmennyiséget olvaszt meg, ami viszont már nem folyik el, hiszen a megolvadása nem befolyásolja a kialakult nyomás-egyensúlyt. A harmadik lépésben elolvadó jég térfogatát is kezelhetjük egy kúp térfogataként:  $V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_3$ , amelyből a magma-benyomulás felett  $h'_3 = \frac{\varrho_j}{\varrho_v} h_3$  magasságú „vízkúp” jön létre. A „vízkúp” tovább növeli a felszíni behorpadás mélységét, amit szintén az előző alkérdésekre adott válaszok szerint határozhatunk meg. Az olvadási folyamat végére létrejövő horpadás teljes  $h$  mélységét így írhatjuk fel:

$$h = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_j} (h_3 + h'_3) = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_j} \cdot H,$$

amelyből a vízkúp tetőpontjának  $H$  magasságát a jégtábla alapjának eredeti szintjéhez képest már könnyen kiszámíthatjuk:  $H = 1,1$  km. A magma-behatolás  $h_1$  magasságát kalorimetrikus egyenlet alapján határozhatjuk meg (a magma belső energiacsökkenése fedezi a jég megolvasztásához szükséges hőt):

$$\begin{aligned} (L_k + c_k \Delta T) \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 \varrho_k &= L_j \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2 + h_3) \varrho_j = \\ &= L_j \frac{1}{3}\pi r^2 [h_1 \varrho_j + h_2 \Delta \varrho + (H - h_1) \varrho_v]. \end{aligned}$$

A szükséges behelyettesítések és számítások elvégzése után a magma-behatolás magasságára  $h_1 = 103$  m adódik. A magma-behatolás és a visszamaradt víztömeg alakját a 2.4 ábra mutatja. A keletkezett és elfolyt víztömegeket ezek után már igen könnyű meghatározni, hiszen  $V_1 + V_2 + V_3$  adja a teljes elolvadt jégtérfogatot, míg  $V_1 + V_2$  azt a jégtérfogatot, amiből a megolvadt víz elfolyt. A numerikus számítások szerint a keletkezett teljes víztömeg:  $m_t = 2,9 \cdot 10^{11}$  kg, míg az elfolyt víz tömege:  $m' = 2,7 \cdot 10^{10}$  kg.

*2.4. ábra*

**3. feladat**

**a)** A közös centrumtól távolodó két objektum látszólagos szögsebességét könnyen meghatározhatjuk, ha látószögüket az idő függvényében ábrázoljuk, és a kapott egyenesek meredekségét leolvassuk. Ha 1-es index jelöli a bal oldali, 2-es index pedig a jobb oldali forrást, akkor  $\omega_1 = 9,54 \cdot 10^{-13}$  rad/s, illetve  $\omega_2 = 4,88 \cdot 10^{-13}$  rad/s értékekre jutunk. A rádióforrások  $v'_\perp$  transzverzális (keresztirányú) sebességét a szögsebesség és az  $R = 12,5$  kpc =  $3,86 \cdot 10^{20}$  m távolság

szorzataként számíthatjuk ki:  $v'_{1,\perp} = 3,68 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 1,23c$ ,  $v'_{2,\perp} = 1,88 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 0,63c$ , ahol  $c$  a fénysebesség.

**b)** Egyszerű számításaink alapján arra a meglepő eredményre jutottunk, mintha a bal oldali objektum *fénynél sebesebben* (!) mozogna. A probléma körültekintőbb tárgyalása érdekében képzeljünk el egy fényforrást, ami  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog egy tőle távoli  $O$  megfigyelő irányához képest  $\varphi$  szögben (*3.1 ábra*). A sebesség nagyságát jelölje  $v = \beta c$ . A fényforrás távolságát a megfigyelő  $R$ -nek méri, szögsebességét  $\omega$ -nak észleli. Tekintsük a forrás mozgását  $\Delta t$  ideig, miközben az  $A$  pontból az  $A'$  pontba jut:  $\mathbf{r}_{AA'} = \mathbf{r}_{A'} - \mathbf{r}_A = \mathbf{v}\Delta t$ .

### 3.1. ábra

Jelölje  $\Delta t'$  az  $A$ -ból, illetve  $A'$ -ből induló jelek beérkezésének időbeli különbségét az  $O$  pontban. Mivel  $A$  és  $A'$  távolsága különböző, a fénysebesség pedig véges:

$$\Delta t' = \Delta t + \frac{r_{A'} - r_A}{c}.$$

Kis  $\Delta t$  idők esetén  $v\Delta t \ll r_A = R$ , tehát

$$r_{A'} - r_A \approx -v\Delta t \cos \varphi.$$

Mindezek figyelembe vételével

$$\Delta t' \approx \Delta t(1 - \beta \cos \varphi), \quad (\beta = v/c).$$

Így a forrás  $O$ -beli látszólagos keresztirányú sebessége

$$v'_\perp = \frac{\Delta x}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t(1 - \beta \cos \varphi)} = \frac{c\beta \sin \varphi}{1 - \beta \cos \varphi},$$

ahol felhasználtuk, hogy a megfigyelő vonatkoztatási rendszerében a valódi keresztirányú sebesség  $v'_\perp = \Delta x/\Delta t = c\beta \sin \varphi$ . Az  $O$ -ban észlelhető szögsebesség:

$$\omega = \frac{v'_\perp}{R} = \frac{c\beta \sin \varphi}{R(1 - \beta \cos \varphi)}.$$

c) Ha feltételezzük, hogy a két objektum egy egyenes mentén, azonos nagyságú sebességgel távolodik egymástól, akkor a következő összefüggéseket írhatjuk fel a látszólagos szögsebességekre:

$$\omega_1 = \frac{c\beta \sin \varphi}{R(1 - \beta \cos \varphi)}, \quad \omega_2 = \frac{c\beta \sin \varphi}{R(1 + \beta \cos \varphi)}.$$

A megadott, illetve mért numerikus értékek segítségével a fenti két kifejezésből egyszerű algebrai átalakításokkal  $\varphi$  és  $\beta$  értéke kiszámítható:  $\varphi = 68,8^\circ$ ,  $\beta = 0,89$ . Megnyugodhatunk tehát, hiszen az észlelt rádióforrások mindössze a fénysebesség 89%-ával mozognak.

d) A látszólagos keresztirányú sebesség akkor lehet nagyobb vagy egyenlő a fénysebességnél, ha a  $\beta \sin \varphi \geq 1 - \beta \cos \varphi$  feltétel teljesül, ami a vizsgált esetben fenn is áll. Ez a feltétel a következő alakba írható át:

$$\beta \geq f(\varphi) = \left[ \sqrt{2} \sin(\varphi + \pi/4) \right]^{-1}.$$

A  $(\beta, \varphi)$  síkon az egyenlőség jelöli ki azt a tartományt, amin belül a feltétel teljesül (3.2 ábra).

3.2. ábra

e) Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a b) alkérdés válaszában megadott

$$v'_{\perp} = \frac{c\beta \sin \varphi}{1 - \beta \cos \varphi}$$

kifejezésnek a fizikailag értelmes szögtartományban adott  $\beta$  esetén akkor van maximuma, ha  $\varphi_{\max} = \arccos \beta$ . Eszerint

a látszólagos keresztirányú sebesség végtelenhez tarthat, ha  $\beta$  megközelíti az 1-et, ami persze azt is jelenti, hogy  $\varphi$  nullához tart, vagyis a mozgó objektum a megfigyelő felé mozog közel fénysebességgel.

f) A relativisztikus Doppler-eltolódás egyenleteit kell kezelniük:

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_0} = \frac{1 \pm \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

A szög kiejtésével kell  $\beta$ -t kifejezniük, amit a két egyenlet összeadásával, majd rendezésével tehetünk meg:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}},$$

tehát a kérdéses szám:  $\alpha = 4$ . A c) alkérdésre adott válasz két egyenletében  $\varphi$  és  $\beta$  voltak az ismeretlenek,  $R$ -et más mérésekből meghatározott, adott értéknek vettük. Ha viszont a legutóbbi összefüggésünket harmadik egyenletnek tekintjük, ami közvetlenül megadja  $\beta$  értékét, akkor  $\varphi$  mellett az  $R$  távolság is meghatározható.

**Honyek Gyula**

## A kísérleti feladat megoldása

### I. rész. Mágneses árnyékolás vizsgálata.

A mérésnek ebben a részében a versenyzők feladata az árnyékolást leíró (a feladat szövegében megadott) képletben szereplő  $\alpha$  együttható frekvenciafüggésének meghatározása volt. Ehhez különböző frekvenciákon különböző vastagságú alumínium fóliával kellett méréseket végezni. A mérés maga nagyon egyszerű: a rendelkezésre álló digitális műszerekkel a frekvenciát és a mérőtekercsben indukálódott feszültséget lehetett mérni – itt legfeljebb a helyes méréstartomány megválasztására kellett figyelni. A versenyzőknek talán azt volt a legnehezebb eldönteni, hogy a rendelkezésre álló idő alatt hány különböző frekvencián és hány különböző fóliavastagság esetében mérjenek.

A mérési adatok kiértékelése is elég hosszadalmas munka. A megadott képlet alapján egy adott frekvencián

$$e^{-\alpha d} = \frac{B}{B_0} = \frac{U}{U_0}, \quad \text{azaz} \quad \ln U = \ln U_0 - \alpha d$$

kifejezést kapjuk, tehát ha  $\ln U$ -t  $d$  függvényében ábrázoljuk, akkor az elmélet szerint a mérési pontoknak a mérés hibahatárán belül egy  $-\alpha$  meredekségű egyenesen kell lenniük. Ezt a grafkont minden egyes mért frekvenciánál el kell készíteni, a mérési pontokra egyenest kell illeszteni, az egyenesek meredekségét le kell olvasni. Ezután lehet ábrázolni  $\alpha$ -t  $f$  függvényében.

### II. rész Mágneses fluxus-csatolás vizsgálata.

A feladat második részében a versenyzők a méréssel kapcsolatos elméleti feladatokat is kaptak. Az 1. kérdésben az önindukciós együtthatókat és a csatolási tényezőt megadó összefüggéseket kellett igazolniuk. Az önindukciós együtthatók definíciója közismert, a csatolási tényező képletét pedig a feladat szövegében megadott összefüggésekkel könnyen igazolhatjuk:

$$\varepsilon_B = \omega N_B(N_B I_B - k N_A I_A) = 0,$$

amiből  $k = (N_B I_B)/(N_A I_A)$  adódik.

A definiáló összefüggések alapján könnyen összerakhatóak a mérési kapcsolások:

#### *4. ábra*

*Megjegyzés.* A kapcsolás megtervezésekor érdemes figyelembe venni, hogy a digitális feszültségmérők  $1\text{ M}\Omega$ -nál nagyobb belső ellenállással „sokkal ideálisabbak”, mint az árammérők.

A 2. és 3. kérdésre ehhez hasonlóan, a feladat szövegében megadott összefüggésekbe való behelyettesítéssel és

rendezéssel lehet válaszolni. Ezt az olvasóra bízjuk. A keresett összefüggések:

$$I_p = I_A = \frac{\varepsilon_A}{\omega L_A(1 - k^2)}, \quad \frac{U_A}{U_B} = \frac{N_A^2 - kN_A N_B}{N_B^2 - kN_A N_B}.$$

A 4. és az 5. feladat két korábbi feltevés számszerű igazolása volt. Az önindukciós együtttható menetszámtól való függését három eredmény ( $L_A$ ,  $L_B$  és  $L_{A+B}$ ) összevetésével igazolhatjuk. Az  $L/N^2$  érték mindhárom esetben hibahatáron belül megegyezik. A primer tekercs 2–3  $\Omega$ -os ohmos ellenállása pedig valóban elhanyagolható a tekercs  $\omega L(1 - k^2)$  induktív ellenállásának kb. 100  $\Omega$ -os értékéhez képest.

A 6. feladat a ferritmág relatív permeabilitásának meghatározása volt. A ferritmagon vékony papírlapok segítségével két rést lehetett létrehozni. Az Ampère-féle gerjesztési törvényt alkalmazva mindkét esetre:

$$NI_1 = \oint \frac{1}{\mu} B dl = \frac{2l}{\mu_0 \mu_r} B_1 \quad \text{a rést nélküli esetben,}$$

illetve

$$NI_2 = \oint \frac{1}{\mu} B dl = \left( \frac{2l}{\mu_0 \mu_r} + \frac{2d}{\mu_0} \right) B_2 \quad \text{a rést tartalmazó mag esetére.}$$

Felhasználva, hogy  $U_1 = \omega N B_1 A$ , illetve  $U_2 = \omega N B_2 A$  és hogy  $L_1 = U_1 / \omega I_1$ , illetve  $L_2 = U_2 / \omega I_2$  azt kapjuk, hogy

$$\mu_r = \frac{l}{d} \left( \frac{L_2}{L_1} - 1 \right),$$

ahol  $l$  a ferritmág középvonalának hossza,  $d$  pedig a papír vastagsága.  $\mu_r$  numerikus értékének meghatározásához a geometriai adatokon kívül már csak a rést tartalmazó vasmagon lévő tekercs önindukciós együttthatóját kellett megmérni.

**Vankó Péter**