[1]

1. feladat. *Szabályos hatszög alapú hasáb gördülése*

1.1. ábra. Egy szabályos hatszög keresztmetszetű hasáb

[1] A feladatok megoldását következő számunkban közöljük. Addig olvasóink (elsősorban a versenyekre készülők) kipróbálhatják tudásukat. Az olimpián 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére, és a megoldásukat egy ún. válaszlapon adták be.

Tekintsünk egy hosszú, merev, szabályos hatszög alapú egyenes hasábot, amilyen pl. egy ceruza (*1.1 ábra*). A homogén sűrűségű hasáb tömege M. A szabályos hatszög mindegyik oldaléle a. A hatszögű hasáb középtengelyére vonatkoztatott I tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = \frac{5}{12} M a^2. \tag{1.1}$$

A hasáb egy hosszanti élére vonatkoztatott I' tehetetlenségi nyomatéka:

$$I' = \frac{17}{12} M a^2. \tag{1.2}$$

1.2. ábra. Szabályos hatszög keresztmetszetű hasáb a lejtőn

a) (*3,5 pont*) A hasáb kezdetben nyugalomban van, tengelye vízszintesen fekszik egy sík lejtőn, aminek a vízszintessel képezett θ hajlásszöge kicsi (*1.2 ábra*). Tételezd fel, hogy a henger oldallapjai enyhén konkávak, így a hasáb csak oldalélei mentén érinti a lejtőt. (Ennek a csekély behajlásnak a tehetetlenségi nyomatékra gyakorolt hatását elhanyagolhatjuk.) A hasábot mozdítsuk ki nyugalmi állapotából, így az egyenetlen mozgással legurul a lejtőn. Feltételezzük, hogy a súrlódás bármilyen csúszást megakadályoz, valamint hogy a hasáb mindvégig érintkezik a lejtővel. Mielőtt egy adott él éppen megérinti a lejtőt, a szögsebesség legyen ω_i, közvetlenül az él és a lejtő érintkezése után pedig ω_f. Mutasd meg, hogy

$$\omega_f = s \cdot \omega_i, \tag{1.3}$$

és írd az s együttható értékét a válaszlap megfelelő rovatába!

b) (*1 pont*) A hasáb mozgási energiája közvetlenül az érintés előtt K_i és közvetlenül utána K_f. Mutasd meg, hogy

$$K_f = r \cdot K_i, \tag{1.4}$$

és az r együttható értékét írd a válaszlap megfelelő rovatába!

c) (*1,5 pont*) Ahhoz, hogy egy következő él is érintse a lejtőt, K_i-nek nagyobbnak kell lennie egy minimális $K_{i,\min}$ értéknél. Ez utóbbi így írható:

$$K_{i,\min} = \delta \cdot Mga. \tag{1.5}$$

Itt $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ a nehézségi gyorsulás. Határozd meg δ-t a lejtő θ hajlásszögének és az r együtthatónak a függvényeként.

d) (*2 pont*) Ha a *c*) alkérdés feltétele teljesül, akkor a K_i mozgási energia egy meghatározott $K_{i,0}$ értékhez tart, miközben a hasáb gördül a lejtőn. Annak ismeretében, hogy ez a határérték létezik, mutasd meg hogy $K_{i,0}$ így írható:

$$K_{i,0} = \kappa \cdot Mga. \tag{1.6}$$

Fejezd ki κ értékét θ és r függvényeként.

e) (*2 pont*) Számítsd ki 0,1° pontossággal, hogy mi a lejtő hajlásszögének az a θ_0 minimuma, amelynél az egyenetlen gördülés – ha egyszer elindult – végtelen hosszan folytatódni fog.

2. feladat. *Víz a jégmező alatt.*

A jégmező szilárd talajon helyezkedik el, függőleges vastagsága néhány km, vízszintes kiterjedése többször 10 vagy 100 km. A feladatban a jég olvadását fogjuk tanulmányozni, és azt, hogy miként viselkedik a víz 0 °C hőmérsékletű jégtömb alatt. Feltételezzük, hogy ilyen feltételek mellett a nyomásváltozások a jégben (akárcsak viszkózus folyadékban) lényegében függőleges elmozdulásokat okoznak.

E feladat megoldásánál a következő adatokat használhatod: a víz sűrűsége: $\varrho_v = 1{,}000 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, a jég sűrűsége: $\varrho_j = 0{,}917 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, a jég fajhője: $c_v = 2{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{J/(kg\ ^\circ C)}$, a jég olvadáshője: $L_j = 3{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{J/kg}$, a kőzet és a magma sűrűsége: $\varrho_k = 2{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, a kőzet és a magma fajhője: $c_k = 700\ \mathrm{J/(kg\ ^\circ C)}$, a kőzet és a magma olvadáshője: $L_k = 4{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{J/kg}$, a Föld felületén kilépő átlagos hőáramsűrűség: $J_Q = 0{,}06\ \mathrm{W/m^2}$, a jég olvadáspontja: $T_0 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, állandó.

a) (*0,5 pont*) Tekints egy vastag jégmezőt, amely alatt hő áramlik fel a Föld mélyéből. A fenti adatokat használva számítsd ki, hogy évente milyen d vastagságú jégréteg olvad el!

2.1. ábra. Lejtőn lévő sík felszínű jégtömb keresztmetszete

2.2. ábra. Egy 0 °C *hőmérsékletű jégtábla úgy nyugszik egy sziklalejtőn, hogy a jég alatt a víz egyensúlyban van*

b) (*3,5 pont*) Tekintsük egy jégtömb felső, sík felszínét. A jégtábla alatt a szikla-lejtő hajlásszöge α. A jégtábla sík felszínének hajlásszöge β (*2.1 ábra*). A jég függőlegesen mért vastagsága az $x = 0$ helyen h_0. Eszerint a jégtáblát alul és felül határoló síkok egyenlete:

$$y_1 = x \cdot \operatorname{tg} \alpha, \qquad y_2 = h_0 + x \cdot \operatorname{tg} \beta. \tag{2.1}$$

Fejezd ki a p nyomást a jégtábla alján az x vízszintes koordináta függvényeként. Ezt a képletet írd a válaszlapra! Fogalmazd meg matematikailag α és β függvényében annak feltételét, hogy a jégtábla és a sziklatalaj közt a víz ne folyjék egyik irányba sem. Mutasd meg, hogy ez a feltétel $\operatorname{tg} \beta = s \cdot \operatorname{tg} \alpha$ alakban írható. Határozd meg az s együtthatót, és eredményedet képlet formájában add meg!

A *2.2 ábrán* az $y_1 = 0{,}8x$ vonal a sziklatalaj menetét mutatja a jégtábla alatt. A jég függőlegesen mért h_0 vastagsága az $x = 0$ helyen 2 km. Tételezzük fel, hogy a víz a jégtábla alatt egyensúlyban van.

A válaszlapon rajzold be az y_1 egyenest, és rajzold fölé a jégtábla felszínét jelző y_2 egyenest is. Jelezd az ábrán, melyik vonal melyiket jelenti!

2.3. ábra. A jégben kialakult vízkúp függőleges keresztmetszete

2.4. ábra. A kúp alakú jég-bemélyedés centrális függőleges síkmetszete
(Az ábra nem méretarányos!)

c) (*1 pont*) Vízszintes talajon elhelyezkedő nagykiterjedésű jégtábla kezdetben $D = 2{,}0$ km vastag. Ekkor a jég viszonylag gyors megolvadása révén egy $H = 1{,}0$ km vastag, $r = 1{,}0$ km sugarú, kúp alakú víztömeg alakul ki (*2.3 ábra*). Tételezzük fel, hogy a visszamaradt jégtömeg ehhez az új állapothoz úgy alkalmazkodik, hogy benne csak függőleges elmozdulások mennek végbe. Vezesd le képletekkel üres, tiszta lapon, és rajzold le a válaszlap ábra-ablakába a jégtábla felső felületének alakját a vízkúp képződése és a hidrosztatikus egyensúly beállta után.

d) (*5 pont*) Egy nemzetközi kutatócsoport expedíciói évente megvizsgálják az Antarktisz 0 °C hőmérsékletű jégtakaróját. Ennek felszíne normálisan egy vízszintes felületű, kiterjedt jégréteg. De most egy mély, kráterszerű mélyedésre bukkannak, ami olyan, mint egy felfordított kúp, amelynek legnagyobb h bemélyedése 100 m és r sugara 500 m (*2.4 ábra).*

Tapasztalataikat megbeszélve a kutatók arra a következtetésre jutnak, hogy a jég alatt kisebb vulkánkitörés történhetett. Egy kevés olvadt magma benyomult a jégréteg aljába, ott megdermedt és lehűlt, eközben bizonyos mennyiségű jeget megolvasztott. A kutatók megpróbálják megbecsülni a behatolt magma térfogatát, hogy megértsék, mitől lett a megolvadt víz. Gondolatmenetük a következő:

Tételezzük fel, hogy a jégben csak függőleges mozgás ment végbe. Azt is tételezzük fel, hogy a behatoló magma 1200 °C hőmérsékleten teljesen folyékony állapotú volt. Az egyszerűség kedvéért még azt is feltehetjük, hogy a benyomulás kúp alakban történt, körszerűen a megfigyelt kúpos jég-bemélyedés alatt. A magma behatolása viszonylag rövid idő alatt ment végbe a hőkicserélődés időigényéhez képest. A hőátadás kezdetben elsősorban függőleges irányú volt, így a jégből kiolvadt térfogat mindig kúp alakú volt, a kúp tengelye pedig a magma-benyomulás centrumán átmenő függőleges volt.

3.1. ábra. Tejútrendszerünk egyik rádióforrásának emissziója

Ezen feltételek mellett a jég megolvadása két lépésben ment végbe. Először a víz nincs nyomás-egyensúlyban a magma fölött, hanem elfolyik onnan. Az elfolyó víz 0 °C hőmérsékletűnek tételezhető fel. Később beáll a hidrosztatikai egyensúly, a víz a keletkezési helyén, a magma-benyomulás felett marad, nem folyik el. Számítsd ki a következő mennyiségeket a hőmérsékleti egyensúly beálltakor, és írd ezeket a válaszlapra:

1. A jégtakaró alatt kialakult vízkúp tetőpontjának H magassága a jégtábla alapjának eredeti szintjéhez képest.
2. A magmabehatolás h_1 magassága.
3. A keletkezett víz teljes m_t tömege és az elfolyt víz m' tömege.

Milliméterpapíron ábrázold *méretarányosan* a magma-behatolás és a visszamaradt víztömeg alakját! A *2.4 ábra* által sugallt koordináta-rendszert használd!

3. feladat. *Fénynél sebesebben?*

Ebben a feladatban egy 1994-ben elvégzett mérést elemzünk és értelmezünk. A mérés egy a Tejútrendszerben lévő összetett forrás rádióhullámú sugárzására vonatkozik. A szélessávú vevőantenna centiméteres hullámhosszú rádióhullámokra volt hangolva. A *3.1 ábra* azt mutatja, hogy különböző időpontokban milyen képet láttak. A „szintvonalak" az azonos intenzitásokat jelzik, mint ahogyan a földrajzi térkép szintvonalai az azonos magasságú pontokat kötik össze. A képen látható és szaggatott vonalakkal érzékeltetett két maximumot úgy értelmezik, hogy két objektum távolodik egy közös centrumtól. Ezt a centrumot keresztek jelzik az ábrákon. (A centrumról feltételezik, hogy nyugszik a térben; ez is erős rádióforrás, de főleg más hullámhosszon sugároz.) A méréseket több, mint egy hónapon át mindig azonos napszakban, azonos órában végezték el. Az ábra léptékét egy skálaszakasz jelzi, ami 1 ívmásodpercnek felel meg (1 ívmásodperc $= 1$ arc sec $= 1$ as $= \frac{1}{3600}$ szögfok). A centrumban lévő kereszttel jelölt égitest becsült távolsága $R = 12{,}5$ kpc. Egy kiloparsec (kpc) $3{,}09 \cdot 10^{19}$ m-nek felel meg. A fény sebessége: $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s. A feladat megoldásában nem kell hibaszámítást végezni.

a) (*2 pont*) A két kidobott rádióforrás szögtávolságát a centrumtól $\theta_1(t)$ és $\theta_2(t)$ jelöli. (Jelölés: 1 a bal oldali, 2 a jobb oldali forrás, t a megfigyelés ideje.) A Földről látszó szögsebességek ω_1 és ω_2. A két rádióforrásnak megfelelő transzverzális (keresztirányú) sebességek: $v'_{1,\perp}$ és $v'_{2,\perp}$. A *3.1 ábra* alapján határozd meg ω_1 és ω_2 értékét ezred-ívmásodperc/nap egységekben. Határozd meg $v'_{1,\perp}$ és $v'_{2,\perp}$ számértékeit is. (Némelyik eredményt meglepőnek fogod találni.)

b) (*3 pont*) Az előző alkérdésben támadt probléma feloldása érdekében képzelj el egy fényforrást, ami $\vec{v}$ sebességgel mozog egy tőle távoli O megfigyelő irányához képest φ szögben ($0 \le \varphi \le \pi$). A sebesség nagyságát jelölje $v = \beta c$, ahol c a fénysebesség. A fényforrás távolságát a megfigyelő R-nek méri, a fényforrás szögsebességét ω-nak észleli. A látásirányra merőleges látszólagos sebesség $v'_{\perp}$.

Határozd meg ω és $v'_{\perp}$ értékeit β, R és φ függvényében!

c) (*1 pont*) Feltételezzük, hogy az *a*) alkérdésben szereplő két kidobott objektum egymáshoz képest ellenkező irányban mozog, szétrepülési sebességük egyenlő, $v = \beta c$. Ekkor a *b*) alkérdés eredményei alapján β és φ kiszámítható az ω_1 és ω_2 szögsebességek, valamint az R távolság ismeretében. Itt φ a *b*) alkérdésben értelmezett szög a bal oldali objektumra vonatkozóan, ami az *a*) alkérdésben az 1 indexnek felel meg. Vezess le képleteket arra, hogyan kell ismert mennyiségekből kiszámítani β és φ értékét. Határozd meg β és φ értékét az *a*) alkérdésben megadott számértékek alapján.

d) (*2 pont*) A *b*) alkérdés szerinti egy-test esetben keresd meg annak feltételét, hogy a látszólagos $v'_{\perp}$ transzverzális sebesség nagyobb legyen, mint a c fénysebesség. Írd ezt a feltételt $\beta > f(\varphi)$ alakba, az f függvényre keress analitikus alakot, és add meg azt a válaszlapon! Rajzold le a (β, φ) koordinátasík fizikailag értelmes tartományát. Satírozd be azt a tartományt, ahol $v'_{\perp} > c$ teljesül.

e) (*2 pont*) A *b*) alkérdésben tárgyalt egy-test esetben találj egy képletet a $v'_{\perp}$ látszólagos transzverzális sebesség maximális $(v'_{\perp})_{\max}$ értékére adott β esetén! észreveheted, hogy ez a maximális látszólagos transzverzális sebesség minden határon túl nőhet, ha $\beta \to 1$.

f) (*1 pont*) Az R értékére vonatkozóan a bevezetőben megadott becsült érték nem megbízható. Ezért a kutatók azon kezdtek gondolkozni, hogy létezik-e jobb és közvetlenebb módszer R meghatározására. Az egyik ötlet a következő:

Tételezd fel, hogy a két kidobott tárgy színképében azonosítjuk és megmérjük egy színképvonal Doppler-eltolódott λ_1 és λ_2 hullámhosszait, ami nyugvó objektum sugárzása esetén λ_0 volna. Indulj ki a relativisztikus Doppler-eltolódás képletéből:

$$\lambda = \frac{\lambda_0(1-\beta\cos\varphi)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.1}$$

Mint korábban, most is tételezd fel, hogy a két tárgy sebessége ugyanolyan nagyságú. Mutasd meg, hogy az ismeretlen $\beta = v/c$ kifejezhető λ_0, λ_1 és λ_2 függvényeként a következő képlettel:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}}. \tag{3.2}$$

Írd be az α együttható számértékét a válaszlap megfelelő ablakába. észreveheted, hogy ily módon a hullámhosszak mért értékéből gyakorlati becslést kaphatsz az R távolságra.

Kísérleti forduló

∗∗[0]

[0] Az olimpián 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére.

Rendelkezésre álló eszközök: Alaplap 6 banándugó hüvellyel; az alaplapba beépített mérőtekercs; U alakú ferritmag A és B jelű tekerccsel; U alakú ferritmag tekercs nélkül; 25 μm, 50 μm és 100 μm vastag alumínium fólia; jelgenerátor részletes használati utasítással; két multiméter (részletes leírással); 6 db röpzsinór banándugóval; 2 db gumigyűrű és 2 kis darab pauszpapír.

I. *örvényáramok mágneses árnyékolása* (*8 pont*)

Időben változó mágneses terek vezetőkben örvényáramokat keltenek. Az örvényáramok viszont ellentétes mágneses teret hoznak létre. Közönséges fémekben a véges vezetőképesség miatt a mágneses tér leárnyékolása nem tökéletes. Az alumínium fólia leárnyékolását fenomenológiailag (tapasztalatok alapján) a

$$B = B_0 e^{-\alpha d} \tag{1}$$

képlettel írjuk le. B a mágneses indukció az alumínium fólia árnyékolása alatt. B_0 a mágneses indukció ugyanezen a helyen, ha nincs jelen fólia, α az árnyékolási együttható és d a fólia vastagsága.

A mérés

A ferritmagot, amelyen a tekercsek vannak, talpaival lefelé úgy állítsd a kiemelkedő fatuskóra, hogy az A tekercs pontosan az alaplapba épített mérőtekercs felett legyen. A vasmagot rögzítsd az alaplapra a gumigyűrűvel, ami a tekercset a fatuskó alatt átvezetve az alaplaphoz köti. Feltételezheted, hogy az alumínium vastagságának és a frekvenciamérésnek elhanyagolható a hibája.

1. (*1 pont*) Az A és B tekercs csatlakoztató végződéseit vezesd el a banándugó-hüvelyekhez, és mérd meg mind a három tekercs ellenállását abból a célból, hogy biztos lehess, hogy jók a csatlakozások. 10 Ω-nál kisebb ellenállásértékeket várhatsz.

2. (*5 pont*) Gyűjts mérési adatokat, hogy ellenőrizd a fent megadott modell-képletet, és határozd meg a (25–175 μm vastag) alumínium fóliák α árnyékolási faktorát a 6–18 kHz frekvenciatartományban. Az alumínium fóliákat a mérőtekercs fölé helyezd úgy, hogy a fóliák az alaplapon bejelölt téglalapot fedjék. Az A tekercsre szinuszos váltófeszültséget kapcsolj!

3. (*2 pont*) ábrázold α értékeit az f frekvencia függvényében!

II. *Mágneses fluxuscsatolás* (*12 pont*)

Azt tanulmányozzuk, hogy két tekercs, melyek közös ferritmagja zárt, hogyan reagál egy külső U_g váltófeszültségre, amit egy szinuszos jelgenerátor ad. Az általad használt berendezésben minden mágneses telítődési jelenség elhanyagolható. Ezen kívül azt is feltételezheted, hogy a ferrit μ mágneses permeabilitása állandó.

Elméleti háttér

Az itt következő elméleti tárgyalásban és az adatok elemzésében is feltételezzük, hogy a két tekercs ohmikus ellenállása és a ferritmag hiszterézis-jelensége elhanyagolható befolyást gyakorol a mért áramerősségekre és feszültségekre. Ezen egyszerűsítések miatt az alábbi tárgyalásban a mért és számított értékek között bizonyos eltérések jelentkezhetnek.

Egy tekercs esete

Először tekintsük egy I áram által átjárt tekercs magját. Az a Φ mágneses fluxus, amit az áram a tekercsben lévő ferritmagban kelt, arányos az I áramerősséggel és az N menetszámmal. A fluxus még egy g geometriai tényezőtől is függ, ami a vasmag nagyságától, alakjától és $\mu = \mu_r \mu_0$ permeabilitásától függ. (A mágneses permeabilitás a mag anyagának mágneses tulajdonságait írja le. A relatív permeabilitás jele μ_r, a vákuum permeabilitása μ_0.) A Φ mágneses fluxust a

$$\Phi = \mu g N I = cNI \tag{2}$$

képlet adja meg, ahol $c = \mu g$. Az indukált feszültség a Faraday-féle indukciótörvényből kapható:

$$U(t) = -N\frac{d\Phi(t)}{dt} = -cN^2\frac{dI(t)}{dt}. \tag{3}$$

Egy L önindukciós együtthatójú tekercsben az áramerősség és a feszültség kapcsolatát az

$$U(t) = -L\frac{dI(t)}{dt} \tag{4}$$

összefüggéssel szokás leírni. A tekercsre kapcsolt szinuszos jelgenerátor

$$I(t) = I_0 \sin \omega t \tag{5}$$

áramot hajt át rajta, ahol ω a körfrekvencia és I_0 az áram amplitúdója. A (3) egyenlet szerint ez a váltóáram a tekercsben

$$U(t) = -\omega c N^2 I_0 \cos \omega t \tag{6}$$

váltófeszültséget indukál. Az áram olyan lesz, hogy az indukált feszültség megegyezzen a jelgenerátor U_g feszültségével. Az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség 90°-os. Ha csak a váltófeszültség és váltóáram U_0, ill. I_0 amplitúdóját tekintjük és a fáziskülönbséget elhagyjuk, az összefüggésünket így írhatjuk:

$$U_0 = \omega c N^2 I_0. \tag{7}$$

(A továbbiakban a 0 alsó indexet elhagyjuk.)

Két tekercs esete

Most tételezzük fel, hogy egy ferritmagon két tekercs van. A ferrit vasmag arra használható, hogy csatolja a mágneses fluxust a tekercsek között. Ideális vasmag esetén a fluxus a mag bármely keresztmetszetén ugyanakkora. Valóságos magok esetében a tapasztalat azt mutatja, hogy a fluxusszóródás miatt a szekunder tekercsen kisebb fluxus lesz, mint a fluxust létrehozó tekercsen. A B szekunder tekercs Φ_B fluxusa és az A primér tekercs Φ_A fluxusa ezek szerint a következő kapcsolatban van:

$$\Phi_B = k\Phi_A. \tag{8}$$

Ugyanígy a B-ben folyó áram által keltett Φ_B fluxus az A tekercsben $\Phi_A = k \cdot \Phi_B$ fluxus-összetevőt fog kelteni. A k csatolási tényező 1-nél kisebb. A mérés során tanulmányozandó ferritmagon két tekercs van transzformátor elrendezésben. Tételezzük fel, hogy az A (primer) tekercset kapcsoljuk a jelgenerátorra. Ha a B tekercsben nem folyik áram ($I_B = 0$), akkor az I_A által indukált U_A feszültség azonos nagyságú és ellentétes U_g-vel. Az I_A által a szekunder tekercsben keltett fluxus a (8) képletből számolható. Így a B tekercsben indukált feszültség:

$$U_B = \omega k c N_A N_B I_A. \tag{9}$$

4. ábra. Transzformátor zárt mágneses körrel

Ha a B tekercsben I_B áram folyik, akkor az az A tekercsben feszültséget indukál, amit az előző összefüggéshez hasonlóan határozhatunk meg. Az A tekercs teljes feszültségét így a következő képlet adja meg:

$$U_g = U_A = \omega c N_A^2 I_A - \omega k c N_A N_B I_B. \tag{10}$$

A szekunder tekercs árama tehát a primer tekercsben ellentétes feszültséget indukál, ami I_A növekedését okozza.

Hasonló összefüggés írható fel U_B-re is. Mérésekkel igazolható, hogy k értéke független attól, hogy melyik tekercset választjuk primer tekercsnek.

A mérés

A két U alakú ferritmagot illeszd össze a *2. ábrán* látható módon, és rögzítsd őket a gumigyűrűkkel. állítsd be a jelgenerátort úgy, hogy 10 kHz-es szinuszos hullámot adjon. Gondolj arra, hogy a multimétereket az egyes méréseknél az ott alkalmazható legérzékenyebb méréshatárban használd. Az A és a B tekercs menetszáma: $N_A = 150$, $N_B = 100$ (± 1 menet tekercsenként).

1. (*3,5 pont*) Bizonyítsd be, hogy az L_A és L_B önindukciós együtthatókra, valamint a k csatolási tényezőre a következő összefüggések érvényesek:

$$L_A = \frac{U_A}{\omega I_A}, \qquad I_B = 0,$$

$$L_B = \frac{U_B}{\omega I_B}, \qquad I_A = 0,$$

$$k = \frac{N_B I_B}{N_A I_A}, \qquad U_B = 0.$$

5. ábra. A ferritmagok a két távtartóval

A válaszlap 1.a ablakában utalj bizonyításod lényegére! A válaszlap 1.b ablakába rajzold le azokat az áramköröket, melyek segítségével L_A, L_B és k meghatározható! A mérés elvégzése után számítsd ki L_A, L_B és k számértékét, és értéküket írd a válaszlap 1.c ablakába!

2. (*2 pont*) Amikor a szekunder tekercs rövidre van zárva, a primer tekercs I_p áramerőssége növekedni fog. Az előzőekben ismertetett egyenletek alapján add meg, hogy I_p hogyan függ a primer feszültségtől, a primer tekercs önindukciós együtthatójától és a k csatolási tényezőtől. Válaszodat írd a válaszlap 2.a ablakába! Mérd meg I_p értékét, a kapott adatot írd a válaszlap 2.b ablakába!

3. (*2,5 pont*) Az A és a B tekercset kétféleképpen kapcsolhatjuk sorba: úgy, hogy a két fluxusjárulék összeadódjék, vagy levonódjék egymásból.

3.1. Számítsd ki a sorbakapcsolt tekercsek L_{A+B} önindukciós együtthatóját a mért adatok alapján arra az esetre, amikor a két tekercs I árama által létrehozott fluxusok összeadódnak (erősítik egymást). Válaszodat írd a válaszlap 3.1 ablakába.

3.2. Mérd meg a U_A és U_B feszültséget arra az esetre, amikor a két tekercs fluxusai ellentétesek. Mért adataidat írd a válaszlap 3.2a ablakába. A két feszültség hányadosát írd a 3.2b ablakba. Vezess le egy képletet a két tekercsre vonatkozó feszültségek hányadosára a menetszámok és a csatolási tényező segítségével, és válaszodat írd a 3.2c ablakba.

4. (*1 pont*) Eredményeid alapján igazold, hogy egy tekercs önindukciós együtthatója menetszámának négyzetével arányos. Eredményedet írd a válaszlap 4. ablakába!

5. (*1 pont*) Igazold, hogy jogos volt a primer tekercs ohmos ellenállásának elhanyagolása. érvelésedet matematikai kifejezések alakjában írd a válaszlap 5. ablakába.

6. (*2 pont*) Ha vékony papírlapokat illesztünk a két fél ferritmag közé (ahogy ezt a *2. ábra* mutatja), akkor a tekercs önindukciós együtthatója jelentősen lecsökken. Ezt a csökkenést felhasználva határozd meg a ferrit-anyag μ_r relatív permeabilitását. Ehhez használd fel az Ampère-féle gerjesztési törvényt, továbbá azt a tényt, hogy a B mágneses indukció nem változik meg a ferrit–papír határfelületen. Tételezd fel, hogy a papír relatív permeabilitása egységnyi, vagyis $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns^2/Cb^2, továbbá a papír vastagsága 43 μm. A geometriai tényező meghatározásánál használd az Ampère-féle gerjesztési törvényt:

$$\oint \frac{1}{\mu} B \, dl = I_{\text{teljes}}, \tag{11}$$

ahol I_{teljes} az integrációs út által kifeszített felületet átmetsző áramok összege. Írd be μ_r-re kapott algebrai kifejezésedet a válaszlap 6.a ablakába, számszerű értékét pedig a 6.b ablakba.