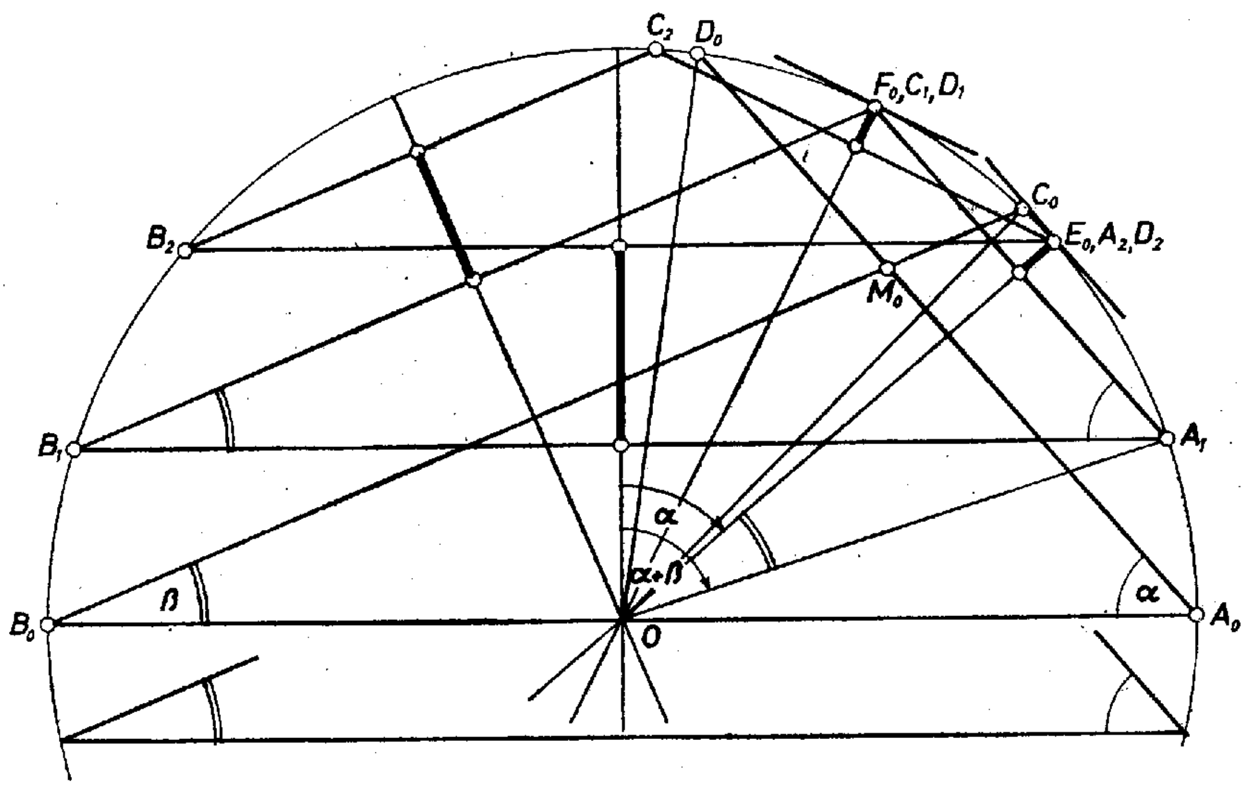
1. Két hegyesszög összege nem érheti el a 180°-ot, amennyi bármely konvex húrnégyszögben két szemben fekvő szög összege, ezért a két adott értékű hegyesszög négyszögeink valamelyik oldalának végpontjaiban van. Válasszuk úgy az $ABCD = N$ négyszög betűzését, hogy ez az oldal AB, és az adott két szög α, β legyen úgy, hogy

$$90^\circ > BAD\sphericalangle = \alpha \geq \beta = ABC\sphericalangle > 0^\circ.$$

Tartsuk k (és N) síkját függőlegesen és az AB oldalt vízszintesen úgy, hogy C és D följebb legyenek, mint A. Ekkor k tetszőleges pontját A-nak választva, kijelölhetjük B, C és D helyzetét, az utóbbi két szögpont azonban nem mindig jön létre, és ha létrejönnek, akkor sem mindig konvex négyszöget ad az önmagában záródó $ABCDA$ útvonal. Feladatunk első része éppen ennek vizsgálata, ebből azután kiadódnak az egyes oldalak keresett korlátai.

Az előzőkkel az első három oldal irányain túl a DC oldal irányát is meghatároztuk, hiszen a D-nél levő külső szög β, és így a DC oldal $(\alpha-\beta)$ szöggel hajlik a vízszintes AB-hez. Így mind a 4 oldal felezőpontja csupán az illető irányra merőleges átmérőn mozoghat (pontosabban azoknak is csak 1–1 szakaszán). Célszerű ezt a 4 átmérő kijelölése után így mondani: N egyes oldalainak két végpontja mindig egymás tükrös párja a megfelelő átmérőre nézve.

2. Válasszuk A kiinduló helyzetéül k vízszintes átmérőjének A_0 jobb oldali végpontját, vegyük hozzá a B_0, C_0, D_0 pontokat, és vizsgáljuk először az olyan α, β értékpárok esetét, amelyek mellett a két szög A_0D_0 és B_0C_0 ferde szárai a k belsejében vagy éppen a k-n levő M_0 pontban metszik egymást (1. ábra).



1. ábra

Akkor ilyen a helyzet, ha

$$A_0M_0B_0\sphericalangle = 180^\circ - (\alpha+\beta) \geq 90^\circ, \qquad \text{azaz} \qquad \text{ha} \quad \alpha+\beta \leq 90^\circ.$$

Ekkor az A_0D_0 és B_0C_0 „oldalak" szétválasztják egymás végpontjait, N_0 hurkolt négyszög, illetve $\alpha+\beta = 90^\circ$ esetén C_0, D_0 és M_0 egybeesése folytán derékszögű háromszög, semmiképpen nem a „mi négyszögünk". Viszont már így is kijelölhetjük az oldalirányokra merőleges átmérőket; pontosabban mondva, elég lesz az AD és a DC oldalra merőleges átmérő E_0, illetve F_0 felső végpontja, ezt nyilván az A_0D_0, illetve a D_0C_0 ív felezőpontja adja meg.

Ilyen marad a helyzet akkor is, ha A-t lefelé toljuk k alsó pontjáig, és egy darabig akkor is, ha A_0-tól fölfele toljuk. Az eddigi hurkoltság, (C_0 és D_0 nem megfelelő sorrendje) akkor szűnik meg, amikor az egymással szemben haladó C és D összetalálkoznak F_0-ban; nevezzük ezt négyszögünk (1-es indexű) N_1 helyzetűnek, bár C_1 és D_1 egybeesése miatt még ez is csak háromszög. De ha az ehhez tartozó A_1-től – ami $F_0 \equiv D_1$-nek E_0-ra vonatkozó tükörképe – bármily kicsivel is feljebb vesszük A-t, megfelelő négyszöget kapunk.

Tovább tolva A-t, A és D találkoznak össze E_0-ban, négyszögünknek ez az N_2 helyzete már ismét csak háromszög, és innen kezdve az AD félegyenes meredekebb, mint k-nak A-beli érintője, tovább tehát nincs mit keresnünk. (Ha $\beta = \alpha$, akkor A és D-vel egyidejűen B és C összetalálkoznak, $\beta < \alpha$ esetén azonban ez nem áll be.) Ezek szerint D az N-nek a „kényes" pontja.

Összefoglalva az eddigieket: N_0 csúcsai és E_0, F_0, kijelölése után akkor kapunk konvex (és előírt irányú oldalakkal bíró) négyszöget, ha D-t az E_0F_0 ív belsejében vesszük fel – és ekkor tovább E_0-ra, F_0-ra való tükrözéssel kapjuk D-ből A-t, C-t, végül A-val „egy magasságban" B-t. Egyben az oldalhosszúságok keresett korlátai, míg a háromszöggé elfajult N_1 és N_2 között haladunk:

$$\begin{aligned} &B_1A_1 > BA > B_2A_2 = B_2E_0, \quad && A_1D_1 > AD > 0, \\ &0 < DC < D_2C_2 = E_0C_2, && F_0B_1 = C_1B_1 > CB > C_2B_2, \end{aligned}$$

itt B_1, B_2 az A_1-gyel, A_2-vel egy magasságban levő pontja k-nak, C_2 pedig E_0 tükörképe F_0-ra. Egyenlőség sehol nincs megengedve. Az oldalak tengelyeinek figyelembe jövő szakaszait az 1. ábrán vastagítottuk.

3. Könnyű belátni, hogy az

$$A_1B_1, \qquad B_1C_1, \qquad C_1A_1, \qquad A_2B_2, \qquad B_2C_2, \qquad C_2D_2$$

húrnak az O középpontból vett látószöge rendre

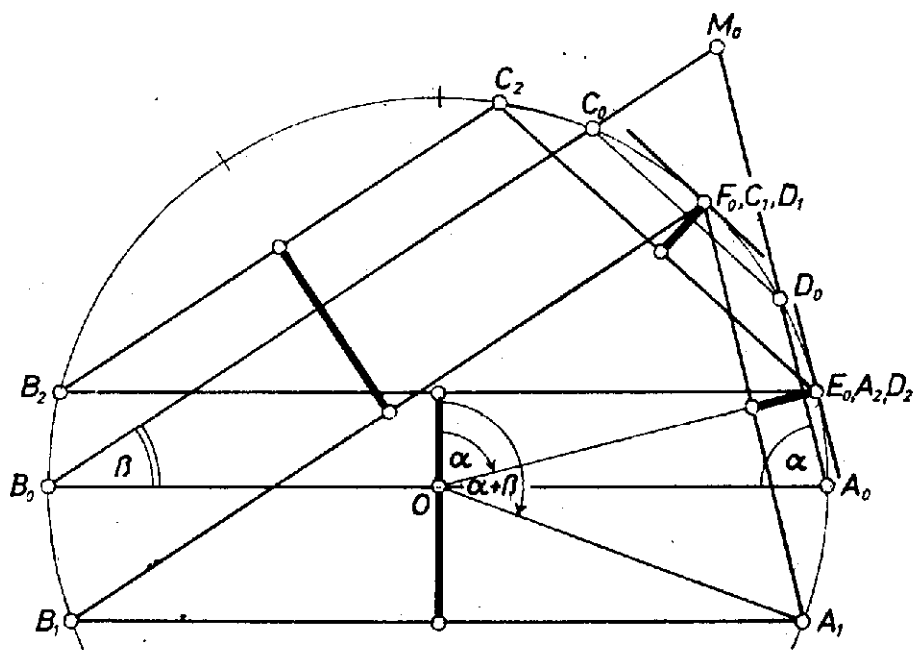
$$2(\alpha+\beta), \qquad 2\alpha, \qquad 2\beta, \qquad 2\alpha, \qquad 2(\alpha-\beta), \qquad 2\beta,$$

ennélfogva a vizsgált esetben

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta) > BA > \sin\alpha, \qquad && \sin\beta > AD > 0, \\ &0 < DC < \sin\beta, && \sin\alpha > CB > \sin(\alpha-\beta), \end{aligned}$$

és BA esetére a kiindulás biztosítja, hogy $\sin(\alpha+\beta) > \sin\beta$.

4. Hasonlóan tárgyalható az olyan α, β értékpárok esete, amelyekre M_0 a k-n kívül adódik, $\alpha+\beta > 90°$ (2. ábra).



2. ábra

Eltérés csak az, hogy ekkor mindjárt N_0 a mi négyszögünk, továbbá C-nek és D-nek E_0-ban való összetalálkozását A-nak A_0-ból lefelé való elmozdítása okozza, AB az $A_0B_0 = 1$ értéktől az A_1B_1 és A_2B_2 húrok kisebbikéig csökkenhet (az egyenlőség kizárásával), és itt $\sin(\alpha+\beta) \gtreqless \sin\alpha$ mindegyike lehetséges.

Ehelyett inkább számítással, formálisan vizsgáljuk pontjaink helyes sorrendjének feltételeit.

Körünk P pontjait az irányított A_0OP szöggel jellemezzük. Legyen A ilyen koordinátája φ, akkor B koordinátája $180° - \varphi$, ahol $-90° < \varphi < 90°$, továbbá $DOB\sphericalangle = 2\ DAB\sphericalangle = 2\alpha$, $AOC\sphericalangle = 2\ ABC\sphericalangle = 2\beta$ alapján C és D koordinátája $\varphi + 2\beta$, ill. $180° - \varphi - 2\alpha$. (B, C és D tehát az A-éval egyenlő sebességgel mozognak, A és C az egyik, B és D a másik forgási irányban.) Ahhoz, hogy $ABCD$ konvex négyszög legyen, szükséges és elegendő, hogy álljon (jelképesen $A < D < C < B$, azaz)

$$\varphi < 180° - \varphi - 2\alpha < \varphi + 2\beta < 180° - \varphi.$$

Az első kettőből $\varphi < 90° - \alpha$, emiatt kell A-nak az $E_0 \equiv A_2$ alatt maradnia, hiszen (jelképesen)

$$E_0 = \frac{1}{2}(A+D) = 90° - \alpha.$$

Ez mindig k felső felén van. A másodikból és a harmadikból $\varphi > 90^\circ - \alpha - \beta$, és itt a jobb oldal A_1 koordinátája; hiszen

$$A_1 = 2E_0 - F_0 = (A + D) - \frac{D + C}{2} = \frac{1}{2}(2A + D - C) = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

(Ez lehet A_0 fölött is, alatta is.)

Az utolsó két koordináta közti egyenlőtlenség nem hoz új korlátozást: $\varphi < 90^\circ - \beta$, ez $\beta \leq \alpha$ és $\varphi < 90^\circ - \alpha$ következtében teljesül.

Mint látjuk, e számítás elemzése nem teheti fölöslegessé $\alpha + \beta$ és 90° nagyságviszonyának figyelembevételét.