Az alábbi dolgozatban rövid ismertetést szeretnénk nyújtani a differenciálgeometria egy nevezetes tételéről, amely Charles Eugene Delaunay francia matematikustól származik 1847-ből.[1]Ch. E. Delaunay (ejtsd: döloné) (1816–1872) csillagászként is kiváló volt, elsősorban a Nap–Föld–Hold rendszer mozgásának számításával (az ún. háromtest-problémával) foglalkozott. Több évtizeden keresztül végzett nagyon pontos számításait nemrég számítógéppel ellenőrizték, és csak néhány jelentékleten hibát találtak benne. A tétel igen plasztikus leírását adja a háromdimenziós euklideszi térben mindazoknak az $\mathcal{F}$ forgásfelületeknek, amiknek az ún. Minkowski-görbülete állandó, avagy – fizikai nyelvezetet használva – amelyek (legalábbis elvben) megvalósíthatók szappanhártyából olymódon, hogy a hártya két oldalán különböző légnyomást hozunk létre.[2]E tétel színes illusztrációja díszíti ezekben a hónapokban a KöMaL címlapját!

A tétel ismertetéséhez, majd pedig bizonyításához szükségünk lesz egy rövid bevezetőre a háromdimenziós térben levő felületek (röviden: *felületek*) differenciálgeometriájának az elemeibe, valamint meg kell ismernünk a szappanhártyák sztatikájának az alapegyenletét. Mindezen felül, a bizonyításban felhasználjuk a tömegpontok Newton-féle mozgástörvényét és a körmozgás kinematikai leírásából a centripetális gyorsulás fogalmát; mindezt azzal a céllal, hogy bizonyos görbületek kiszámítását leegyszerűsítsük és szemléletesebbé tegyük az Olvasó számára. Emiatt joggal lesz mondható, hogy az itt következő bizonyítás „tiszta matematikai” értelemben nem 100%-ig teljes, cserébe viszont bőségesen kárpótol bennünket a szemléletesség és a fizikai intuíció felhasználása.

Felületek görbületei. Minkowski-görbület

A következő dolgokat bizonyítás nélkül felhasználjuk a differenciálgeometriából:

Legyen $\mathcal{F}$ egy sima felület, ami áthalad az O referencia ponton. A derékszögű koordináta-rendszer alkalmas elmozgatásával feltehető, hogy O éppen az origó és az $\mathcal{F}$ felület O pontbeli érintő síkja a $z=0$ egyenletű sík. A tér z tengely körüli alkalmas elforgatásával még az is elérhető, hogy az $\mathcal{F}$ felületet legjobban (azaz harmadrendben kicsi hibával) közelítő $z=q(x,y)$ kvadratikus függvénygrafikon egy

$$q(x,y)=\frac{1}{2}\left(\kappa_1 x^2+\kappa_2 y^2\right) \tag{1}$$

ún. diagonális kvadratikus alakkal adható meg, azaz olyannal, amelyre q-ban nincs vegyes másodrendű (xy-nal arányos) tag.

Megjegyzés.[3]Az apróbetűs „megjegyzések” nem tartoznak szorosan a cikk fő gondolatmenetéhez, ezért a részletek iránt kevésbé érdeklődő Olvasó először nyugodtan átugorhatja ezeket. Az itt fellépő κ_1 és κ_2 számokat az $\mathcal{F}$ felület, annak O pontja, és a felület „pozitív oldalának”, vagyis a z tengely irányának kiválasztása egyértelműen meghatározza, természetesen e két szám sorrendjétől eltekintve.

A κ_1 és κ_2 mennyiségeket a felület O-beli *főgörbületeinek* nevezik. E két szám szorzatát hívják az $\mathcal{F}$ O-beli Gauss-görbületének, míg e két szám összege a Minkowski-görbület.[4]A Minkowski-görbület (összgörbület) felét átlaggörbületnek is nevezik. A Gauss-görbület (szorzat-görbület) fontos szerepet játszik az általános relativitáselmélet matematikai megfogalmazásában. Végezetül, a $q(x,y)=\frac{1}{2}\left(\kappa_1 x^2+\kappa_2 y^2\right)$ diagonális kvadratikus alakhoz tartozó x és y tengelyirányokat az $\mathcal{F}$ felület O pontbeli *főirányainak* nevezik.

Megjegyzések. 1. A főirányokban vett görbületeknek egyszerű szemléletes jelentés is tulajdonítható. Ezek a számok a felületet (a megadott irányokban haladva) a legjobban közelítő körök, az úgynevezett *simulókörök* sugarainak reciprokai. Tekintsük például a felületet az $y=0$ síkban *(2. ábra)*. A bejelölt derékszögű háromszögre felírhatjuk Pitagorász tételét: $(r_1-q)^2+x^2=r_1^2$, ahonnan $q(2r_1-q)=x^2$, azaz $q\ll r_1$ esetén $q(x,y=0)\approx x^2/(2r_1)$ adódik. Összehasonlítva a megadott kvadratikus alakkal látható, hogy $\kappa_1=1/r_1$, és hasonlóan adódik, hogy $\kappa_2=1/r_2$.

2. Ha a felület valamelyik főgörbülete negatív, akkor a megfelelő simulókör sugarának reciproka a görbület (-1)-szeresét adja.

3. A felület pozitív oldalának, azaz a felület irányításának megváltoztatásával κ_1 és κ_2 mindössze előjelet vált, így tehát ugyanez történik a Minkowski-görbülettel is, a Gauss-görbület viszont változatlan marad.

A főirányok és a főgörbületek fogalmát egy másik, geometriai úton is megvilágíthatjuk. Képezzük a felület $\vec{n}$ normálvektorát (vagyis az érintősíkra merőleges, a felület „pozitív” oldala felé irányított egységvektort) a felület O pontjában, illetve annak kis környezetében. Ha az O referencia pontból egy kicsiny $\overrightarrow{\Delta r}$ vektorral elmozdulunk a felület (tehát lényegében az érintősík) valamely közeli pontjába, akkor az ottani normálvektor – a felület görbültsége miatt – egy kicsit el fog térni az eredeti normálvektortól *(3. ábra)*. Jelöljük ezt az eltérést $\overrightarrow{\Delta n}$-nel. $\vec{n}$ hosszának változatlansága miatt $\vec{\Delta n}$ merőleges $\vec{n}$-re, tehát $\overrightarrow{\Delta n}$ is az érintősíkban fekszik. Vizsgáljuk meg, mi a kapcsolat $\overrightarrow{\Delta r}$ és $\overrightarrow{\Delta n}$ között! Ezen két vektor (mindkettő infinitezimálisan kicsiny) nagysága arányos egymással, de az irányuk általában különböző. Van azonban az érintősíkban két olyan irány, amelyek mentén elmozdulva $\overrightarrow{\Delta r}$ és $\overrightarrow{\Delta n}$ párhuzamosak maradnak, tehát a

[1] 1
[2] 2
[3] 3
[4] 4

kapcsolatuk így fejezhető ki:

$$\overrightarrow{\Delta n} = -\kappa \cdot \overrightarrow{\Delta r}, \tag{2}$$

ahol κ a megfelelő irányhoz *(főirányhoz)* tartozó *főgörbület*. Belátható, hogy a két főirány egymásra merőleges, és hogy a főgörbületek a megfelelő simulókörök sugarainak reciprokai.

Szappanhártyák Minkowski-görbülete

A mechanikából ismeretes *Laplace*-nak a következő, 1806-ból származó tétele: Egy egyensúlyi helyzetben levő $\mathcal{F}$ szappanhártya esetében az $\mathcal{F}$ felület minden pontjában

$$p^+ - p^- = \alpha(\kappa_1 + \kappa_2),$$

ahol p^+ és p^- az $\mathcal{F}$ hártya pozitív illetve negatív oldalán mért gáznyomás, $\alpha > 0$ pedig csupán a hártyától függő állandó *(4. ábra)*.[5] Az α állandó éppen a folyadékhártya felületi feszültsége (egységnyi szakaszon ható felületi erő, vagy ami ezzel egyenértékű: a hártya egységnyi felületére jutó energia). Tekintettel arra, hogy a szappanhártyának 2 oldala van, α megegyezik a folyadék (levegőre vonatkoztatott) felületi feszültségének kétszeresével. Így tehát (a $\Delta p = p^+ - p^-$ nyomáskülönbség állandó volta miatt) a szappanhártyák mindig konstans Minkowski-görbületű felületek.

Megjegyzés. Az idézett tétel a következőképpen szemléltethető. Tekintsük a felületnek kicsiny, a megfelelő simulókörök középpontjából $\Delta\varphi_1$, illetve $\Delta\varphi_2$ szögben látszó darabkáját (*5. ábra*). Ennek a felületdarabkának közelítőleg $r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2$ a területe, a felületi feszültség következtében tehát $\alpha \cdot r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2$ energiával rendelkezik.

Képzeljük el, hogy a felület valamilyen ok miatt az eredeti helyzetéhez képest egy kicsiny ε távolságnyira elmozdul. A megadott szögek alatt látszó felületdarabka nagysága és ezzel együtt a hozzá tartozó felületi energia megváltozik, méghozzá

$$\begin{gathered} \Delta E_f = \\ = \alpha \cdot (r_1 + \varepsilon)\Delta\varphi_1 \cdot (r_2 + \varepsilon)\Delta\varphi_2 - \alpha \cdot r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2 \approx \\ \approx \alpha \cdot (r_1 + r_2)\Delta\varphi_1 \cdot \Delta\varphi_2 \cdot \varepsilon \end{gathered}$$

mértékben. Másrészt a felület két oldalán levő gázok a $\Delta p = p^+ - p^-$ nyomáskülönbség miatt

$$W = \Delta p \cdot r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2 \cdot \varepsilon$$

nagyságú munkát végeznek. A munkatétel értelmében $W = \Delta E_f$. (Ha ez nem teljesülne, akkor a felület valamilyen irányú elmozdulása során energia szabadulhatna fel, tehát a felület nem lenne stabil egyensúlyi helyzetben). Behelyettesítve ΔE_f és W kifejezéseit, majd kihasználva a főgörbületek és a görbületi sugarak közötti kapcsolatot, éppen Laplace tételét kapjuk.

A kérdés mármost az, hogy melyek az állandó Minkowski-görbületű forgásfelületek, azaz mely forgásfelületek hozhatók létre (legalábbis elvben) szappanhártyából? A választ Delaunay már említett tétele adja meg:

TÉTEL *Az állandó Minkowski-görbületű forgásfelületek úgy származtathatók, hogy egy S sík e egyenesén gördítünk egy C kúpszeletet, majd pedig C-nek a kiválasztott F_1 fókusza által leírt γ görbét megforgatjuk az e egyenes körül. Az így kapható γ-k által söpört $\mathcal{F}$ felületek a keresett forgásfelületek.*

Megjegyzések. 1. Az alábbiakban mi csupán az ellipszisek gördítésével nyerhető $\mathcal{F}$ felületekről látjuk be azt, hogy azok állandó Minkowski-görbületűek. A dolgozat végén rövid utalásokat teszünk arra, hogy az egyéb kúpszeletek esete miként tárgyalandó, illetve hogy azoknak milyen sajátosságaik vannak.

2. Azzal nem foglalkozunk bővebben, hogy a fenti eljárással miért is kapható meg az összes, kívánt tulajdonságú forgásfelület. Ezt a megfelelő differenciálegyenlet felírásával és a szabad paraméterek analízisével kaphatnánk meg.

Forgásfelületek főgörbületei

Forgassuk meg az $y = f(x)$ grafikont (itt f egy pozitív, sima függvény) az x tengely körül. Így kapjuk az $\mathcal{F}$ forgásfelületet.[6] $f(x)$ grafikonját az $\mathcal{F}$ felület *vezérgörbéjének* nevezik.

Bizonyítás nélkül felhasználjuk a differenciálgeometriából a következő, egyébként eléggé szemléletes eredményeket: Az $\mathcal{F}$ felület $F_1 = (x_0, y_0)$-pontbeli főirányait az alábbi egyenletrendszerű egyenesek adják meg:

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

55

66

tehát z tengellyel párhuzamos egyenes, illetve

$$z = 0, \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

ami nem más, mint a vezérgörbe F_1 pontbeli érintője.[7] $f'(x_0)$ az $y = f(x)$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát (deriváltját) jelöli, ami közelítőleg $\Delta y/\Delta x$ módon is kiszámítható. A továbbiakban – a differenciálszámításban nem eléggé jártas Olvasók kedvéért – nem teszünk különbséget a derivált és a differenciahányados között, ez utóbbit azonban mindig „infinitezimálisan kicsiny" mennyiségek arányaként értjük.

Az elsőnek megfelelő κ_1 főgörbület $r_1 = 1/\kappa_1$ reciproka (vagyis a görbületi sugár) az

$$r_1 = y_0\sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \tag{3}$$

képlettel, míg a másik főgörbület $r_2 = 1/\kappa_2$ reciproka az

$$r_2 = \frac{\left[1 + (f'(x_0))^2\right]^{3/2}}{|f''(x_0)|} \tag{4}$$

formulával kapható meg.[8] f'' az $f(x)$ függvény második deriváltját jelöli.

(*Vigyázat:* $f'' > 0$ esetén a kétféle görbület „ellentétes irányú", emiatt Laplace tételében ellentétes előjellel veendők figyelembe.)

Megjegyezések: 1. r_2 éppen az $y = f(x)$ grafikon $F_1 = (x_0, y_0)$ pontbeli simulókörének sugara, míg r_1 éppen az F_1 pont távolsága az $y = f(x)$ görbe F_1-beli normálisának az x tengellyel vett Q metszéspontjától. A könnyebb érthetőség kedvéért megemlítjük továbbá, hogy a Q középpontú, r_1 sugarú gömb másodrendben (azaz harmadrendűen kis hibával) simul az $\mathcal{F}$ felülethez az $x = x_0, y = y_0$ egyenes irányában.

2. A (4) formula könnyen igazolható a következő, fizikai gondolatmenettel. Tekintsük egy tömegpont síkbeli, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$ vektorfüggvénnyel leírt mozgását, ahol t az idő paraméter. (Ez az x tengely irányában egységnyi sebességű, tehát egyenletes, y irányban pedig megadott módon változó mozgás.) Ennek a mozgásnak a sebességvektora $\vec{v}(t) = (1, f'(t))$, gyorsulása pedig $\vec{a}(t) = (0, f''(t))$. Képezzük ezután az $\vec{a}(t)$ gyorsulásnak a skaláris szorzatát a $\vec{v}(t)$-re merőleges, alkalmasan irányított

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\,(f'(t), -1) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + (f'(t))^2\right)}}\,(f'(t), -1)$$

egységvektorral, azaz vegyük a gyorsulásnak a sebességre merőleges komponensét! A megfelelő körmozgással vett analógia alapján ez a skaláris szorzat nem egyéb, mint $|\vec{v}(t)|^2/r_2$, ahol r_2 éppen a függvény grafikonja simulókörének a keresett sugara. A mondott egyenlőséget felírva és r_2-re megoldva kapjuk (4)-et.

3. A következő fizikai érveléssel szemléltethetjük, hogy a forgásfelületek összgörbülete valóban a fentebb megadott r_1 és (a megfelelő előjellel vett) r_2 reciprokának összege.

Vágjuk el a felületet az x tengelyre merőlegesen két közeli síkkal *(7. ábra).* Az így adódó „abroncs" felülete $2\pi y_0 r_2 \Delta\varphi$, ahol $\Delta\varphi$ a vezérgörbe kimetszett kicsiny AB szakaszának látószöge a simulókör O középpontjából nézve.

Gondoljuk meg, mi történik, ha a vezérgörbét a szóban forgó AB szakaszon egy kicsiny ε távolsággal közelebb hozzuk a vezérgörbe simulókörének O középpontjához (az $A'B'$ pontokig), majd az így adódó (eldeformált) görbét forgatjuk meg az x tengely körül. Az abroncs felülete egy kicsit megváltozik, méghozzá két ok miatt: egyrészt az $AB = r_2\Delta\varphi$ távolság lecsökken $\varepsilon\Delta\varphi$-vel, másrészt az abroncs „sugara" y_0-ról $y_0 + \varepsilon\cos\varphi$-re növekszik. Így a felület nagysága

$$\begin{aligned}(r_2 - \varepsilon)\Delta\varphi \cdot 2\pi(y_0 + \varepsilon\cos\varphi) - r_2\Delta\varphi \cdot 2\pi y_0 \approx \\ \approx \varepsilon 2\pi\Delta\varphi\,(r_2\cos\varphi - y_0)\,,\end{aligned}$$

a felületi energia pedig

$$\Delta E_f = \alpha\varepsilon 2\pi\Delta\varphi\,(r_2\cos\varphi - y_0)$$

értékkel megváltozik. Másrészt a görbe eltorzítása miatt a vizsgált térrész térfogata is egy kicsit megváltozik. A térfogat növekedése közelítőleg a bevonalkázott terület és az abroncs kerületének szorzata, tehát

$$\Delta V = \varepsilon \cdot r_2\Delta\varphi \cdot 2\pi y_0.$$

Ha a felület két oldalán levő gázok nyomáskülönbsége Δp, a tágulási munka $W = \Delta p \cdot \Delta V$. Az egyensúly feltétele most is $\Delta E_f = W$, ahonnan

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{\cos\varphi}{y_0} - \frac{1}{r_2}\right) = \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

77

88

adódik. Összehasonlítva ezt az eredményt a Laplace-törvénnyel (és megfontolva a görbületek előjelét) láthatjuk, hogy a Minkowski-görbület valóban a megadott kifejezéssel egyenlő.

4. A főgörbületek (2) definíciója alapján is be lehet látni, hogy a forgásfelületek összeggörbülete valóban az (3) és (4) összefüggésekkel megadott sugarak reciprok-összege. Vegyük fel a forgásfelület normálvektorát a *6. ábrán* látható F_1 pontban, majd nézzük meg, hogyan változik a normálvektor, ha kicsit kimozdulunk az F_1 pontból. A vezérgörbe mentén mozogva $\overrightarrow{\Delta n}$ nyilván arányos az elmozdulásvektorral és az arányossági tényező nagysága (a simulókör sugarának definíciója alapján) $1/r_2$.

Ha viszont a normálvektor talppontját az x tengely körül (egy y_0 sugarú kör mentén) mozgatjuk el egy kicsit, a normálvektor végpontja egy $\cos\varphi$ sugarú kör mentén mozdul el (hiszen ekkora a normálvektor y komponense). Az elmozdulások aránya (vagyis a görbület) a megfelelő körök sugarainak arányával egyezik meg:

$$\kappa_1 = \frac{\cos\varphi}{y_0} = \frac{1}{r_1}.$$

A számolás

Gurítsuk tehát a C ellipszist az e egyenesen a *8. ábrán* látható módon: Szokás szerint a féltengelyek hosszát a-val és b-vel jelöljük ($0 < b \leq a$), $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ a fókuszoknak az ellipszis középpontjától mért távolsága. Az F_1 kiválasztott fókusz leírta γ görbét forgatjuk meg az e egyenes körül, és így kapjuk az $\mathcal{F}$ forgásfelületet. Legyen Q a C ellipszis és az e egyenes közös érintési pontja (ami az e egyenesen „jobbra" mozog), valamint x a változó $|F_1Q|$ távolság. Jelölje továbbá s a mozgó Q pontnak az e-n levő, rögzített O referencia ponttól mért távolságát, ami nem egyéb, mint a C ellipszisen mozgó Q pontnak az ellipszisen mért ívhossz paramétere. Végezetül legyen a $\overrightarrow{QF_1}$ vektor és az e egyenes $\vec{n}$ (C felé mutató) normálisa által bezárt szög a változó φ.

1. *A* $\cos\varphi$ *kifejezése.*

A QF_1F_2 háromszög 2φ szögére vonatkozó koszinusztétel szerint

$$4c^2 = x^2 + (2a - x)^2 - 2x(2a - x)\cos 2\varphi.$$

Felhasználva a $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ azonosságot, az egyenletet rendezve és a továbbiakban hasznos

(5) $$u = \frac{1}{\cos\varphi}$$

mennyiség négyzetére megoldva

(6) $$u^2 = \frac{1}{a^2 - c^2}(2ax - x^2)$$

adódik.

2. *Változási arányszámok kiszámítása.*

Elemi geometriai észrevétel *(9. ábra)*, hogy az $x = |QF_1|$ távolság s ívhossz szerinti megváltozási rátája éppen $\sin\varphi$, azaz

(7) $$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \sin\varphi,$$

a φ szög alkalmas, előjeles értelmezése mellett.

Írjuk fel a (6) egyenletet egy kicsit megváltozott $u + \Delta u$ és $x + \Delta x$ értékekkel, majd vonjuk ki belőle az eredeti egyenletet. A kicsiny mennyiségek négyzetének elhanyagolásával

(8) $$u\Delta u = \frac{1}{a^2 - c^2}(a - x)\Delta x$$

adódik.

Másrészt a *10. ábráról* leolvashatjuk, hogy $\Delta u = \operatorname{tg}\varphi u \Delta\varphi$, azaz

(9) $$\frac{\Delta u}{\Delta\varphi} = u^2 \sin\varphi.$$

Összevetve a (7), (8) és (9) egyenleteket, továbbá felhasználva (5)-öt és (6)-ot is végül azt kapjuk, hogy

(10) $$\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta\varphi} = \frac{2ax - x^2}{(a - x)\cos\varphi}.$$

Megjegyzés. Ugyazezt az eredményt természetesen megkaphatjuk a differenciálszámítás összefüggéseinek alkalmazásával is. Ha deriváljuk (6)-ot az s változó szerint, felhasználjuk (5)-t és a „láncszabályt”, továbbá a (7)-nek megfelelő $x'(s) = \sin\varphi$ összefüggést, némi számolás után (10)-hez jutunk.

3. *A κ_2 görbület kiszámítása.*

A forgásfelületek főgörbületeiről korábban mondottak szerint $\kappa_1 = \dfrac{1}{|F_1Q|} = \dfrac{1}{x}$. Számítsuk most ki a γ görbe F_1-beli simulókörének $r_2 = \dfrac{1}{\kappa_2}$ sugarát, hogy megkaphassuk a κ_2 főgörbület értékét is!

Vegyük először is észre, hogy minden egyes pillanatban az F_1Q egyenes merőleges az F_1 pont leírta γ görbére. Ez úgy látható be a legegyszerűbben, hogy az F_1 és Q pontokat egy pillanatra úgy interpretáljuk, mintha azok az ellipszis alakú lemez peremére festett pettyek volnának, és e két felfestett pont mozgását, pontosabban a sebességeiket vizsgáljuk. Az ellipszis gördülése miatt a felfestett Q pont sebessége nulla, valamint az F_1Q szakasz hossza állandó. Ebből már következik, hogy az F_1 pont sebessége merőleges az F_1Q egyenesre.

Teljen el egy kicsiny idő, miáltal a Q pont menjen át a Q', az F_1 pont pedig az F_1' pontba *(11. ábra)*! Az r_2 görbületi sugár – definíció szerint – az F_1Q és $F_1'Q'$ egyenesek (amik a γ görbe normálisai) H metszéspontjának és az F_1 pontnak az előjeles távolsága. A $Q'QH$ kicsiny háromszögben a H-nál levő szög éppen $-\Delta\varphi$, a vele szemben fekvő oldal Δs, míg a Q csúcsnál levő szög $(\pi/2) - \varphi$. Így tehát a szinusztétel értelmében és (10) szerint

$$|QH| \approx Q'H = \frac{\Delta s \cdot \cos\varphi}{\sin(-\Delta\varphi)} \approx -\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}\cos\varphi = \frac{2ax - x^2}{x - a},$$

továbbá

$$\frac{1}{\kappa_2} = r_2 = x + |QH| = x + \frac{2ax - x^2}{x - a} = \frac{ax}{x - a}.$$

Innen és a $\kappa_1 = 1/x$ azonosságból azonnal látszik, hogy

$$\kappa_1 + \kappa_2 \equiv \frac{1}{a} = \text{állandó},$$

s éppen ezt akartuk bizonyítani.

A *12. ábra* kvalitatív képet ad a γ görbe alakjáról. Látszik, hogy γ fel-alá „hullámozva”, periodikusan halad az e egyenes irányában; a periódus hossza éppen a C ellipszis kerülete.

Záró megjegyzések (bizonyítások nélkül)

1. A hiperbola esete. Az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolának az e egyenesen való gördítése során az $F_1(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ fókusz leírta γ görbét az e egyenes körül megforgatva a konstans $-1/a$ Minkowski-görbületű $\mathcal{F}$ forgásfelületet kapjuk. Ennek az igazolása az ellipszis esetéhez teljesen hasonló módon történhet, mindössze a szükséges előjelcseréket kell végrehajtani a megfelelő képletekben. Két dologra azonban különös figyelmet kell fordítani a hiperbola esetében:

a) Amikor a gördülő hiperbolának az e egyenessel való Q érintkezési pontja határátmenetben kimegy az egyik hiperbola-ág „végére”, akkor a hiperbola az egyik ideális pontjában érinti az e egyenest, azaz az e egyenes lesz az egyik aszimptota. Ilyenkor a gördítést logikusan úgy kell folytatni, hogy áttérünk a hiperbola másik ágára, miközben a kiválasztott fókuszt – természetesen – változatlanul hagyjuk.

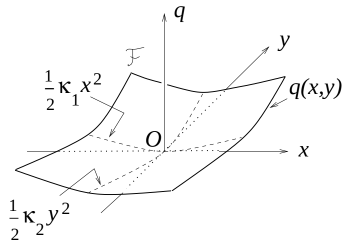
b) A γ görbe hurkolt lesz ugyan, de továbbra is periodikusan az e egyenes irányában halad, amint azt a *13. ábra* kvalitatívan mutatja. Vigyáznunk kell azonban a Minkowski-görbület előjelezésével! A γ görbének továbbra is az e egyenes felőli oldalát (azaz az $\mathcal{F}$ belsejének megfelelő oldalt) deklarálva pozitív oldalnak, a Minkowski-görbület negatív: $\kappa_1 + \kappa_2 = -1/a < 0$. Ez azt jelenti, hogy (az egyszerűség kedvéért) az e egyenes körül nulla gáznyomást véve, a szappanhártya egyensúlyban tartásához $p > 0$ külső nyomás, a hurkok által bezárt térrészekben pedig $2p$ nyomás szükséges, alkalmas p értékkel.

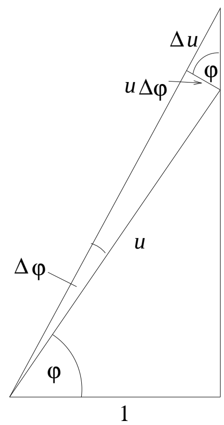
2. A parabola. Ez az egy ideális ponttal rendelkező kúpszelet, ami úgy is felfogható, mint egy $a = \infty$ fél nagytengely hosszú ellipszis, azaz $1/a = 0$ lesz. Ennek megfelelően, a parabolák gördítésekor kapható $\mathcal{F}$ felületek lesznek a nulla Minkowski-görbületű (az ún. minimál-) forgásfelületek. Az ilyen felületek egy hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározottak és a nevük: katenoidok. A név eredete a latin *catena* (jelentése: lánc), mivel a megfelelő γ görbék az $y = \dfrac{p}{2}\mathrm{ch}\dfrac{2x}{p}$ egyenletű úgynevezett *láncgörbék,* ahol p a parabolánk paramétere, $\mathrm{ch}x = (e^x + e^{-x})/2$ pedig a hiperbolikus koszinusz függvény. A láncgörbe elnevezés onnan származik, hogy a két pont között függő, homogén tömegeloszlású lánc ilyen alakot vesz fel.

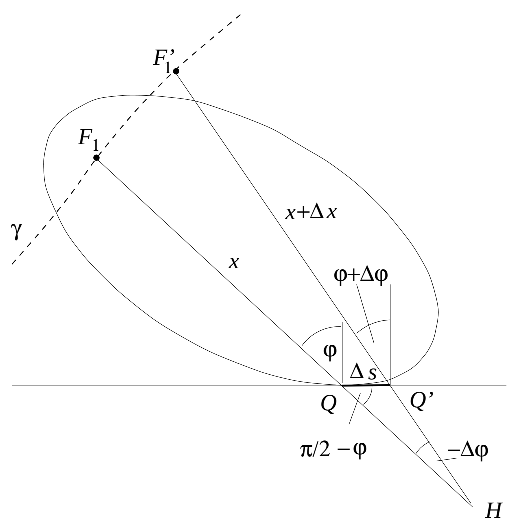
3. A kör. Ekkor kapjuk a hengerfelületet.

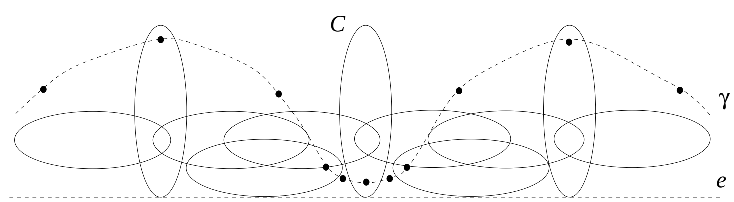
4. Az egyenes szakasz, mint elfajult ellipszis. A $2a$ hosszúságú egyenes szakasz felfogható, mint egy $2b = 0$ kistengely-hosszú elfajult ellipszis, a szakasz két végpontjával, mint fókuszokkal. Világos módon ekkor az $\mathcal{F}$ felület $2a$ sugarú gömböknek egy végtelen füzére lesz: a gömbök középpontjai egymástól $4a$ távolságra lesznek felfűzve az e egyenesre.

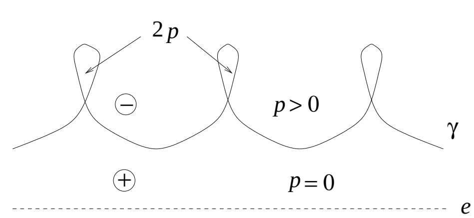
Simányi Nándor Szeged, JATE Bolyai Intézet,
Gnädig Péter Budapest, ELTE Atomfizikai Tanszék

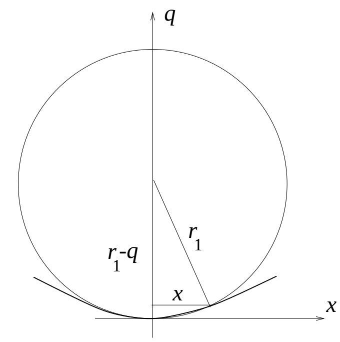


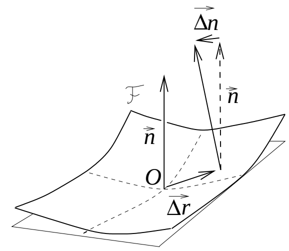


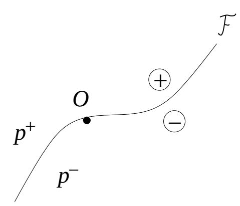


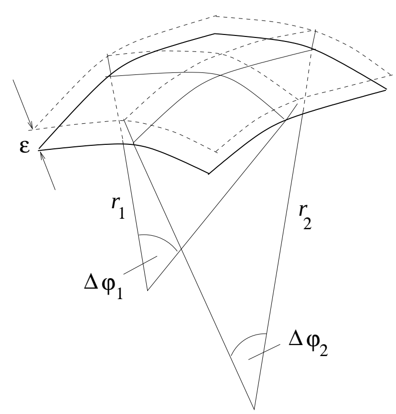


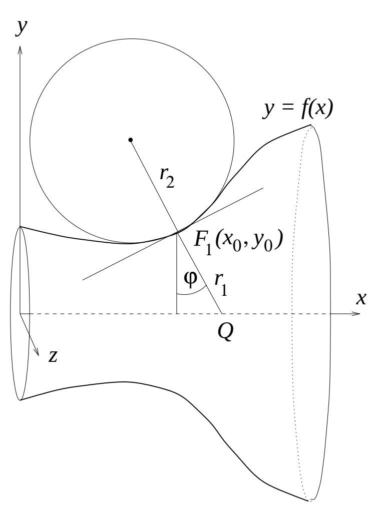


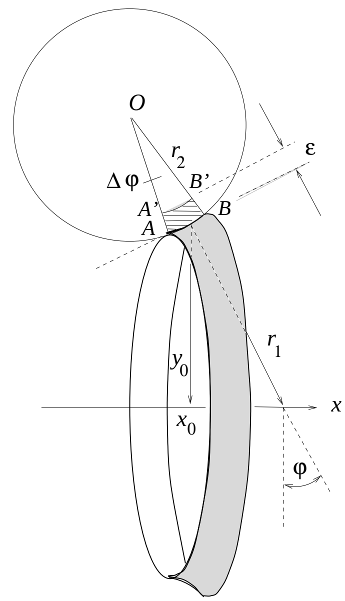

q
r_1
r_1-q
x
x


$\vec{\Delta n}$
$\mathcal{F}$
$\vec{n}$
$\vec{n}$
O
$\vec{\Delta r}$

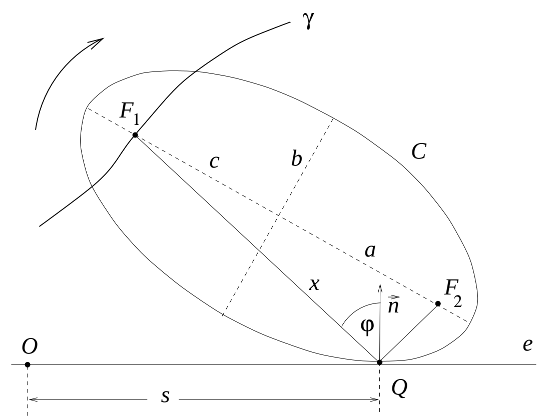

$\mathcal{F}$
+
O
−
p^+
p^-


ε
r_1
r_2
$\Delta\varphi_1$
$\Delta\varphi_2$

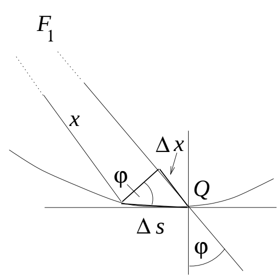

y
y = f(x)
r_2
$F_1(x_0, y_0)$
φ
r_1
x
Q
z



O
r_2
ε
Δφ
B'
A'
B
A
r_1
y_0
x
x_0
φ



γ
F_1
c
b
C
a
x
$\vec{n}$
F_2
φ
O
e
Q
s



F_1
x
Δx
φ
Q
Δs
φ