A múlt havi számunkban közreadtuk az 1997. évi Téli Ankéton meghirdetett Totó kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, X, X, 1, X, X, X, 2.

A legtöbb találatot, nevezetesen 10-et ketten érték el: *Terpai Tamás*, a Fővárosi Fazekas M. Gyak. Gimn. 11. évfolyamos tanulója és *Rudolf Gábor*, az ELTE TTK I. éves matematikus hallgatója. A 9, 8 ..., 2 találatos szelvények száma rendre 8, 17, 11, 8, 3, 4, 2 és 1. (Érdemes felrajzolni az „eloszlás-diagramot, és leolvasni belőle a „ráérzőképesség" várható értékét és szórását.)

Az alábbiakban néhány – a szokásosnál kicsit fogósabb – kérdés megoldásához adunk útmutatót. (A feladatok szövegét ld. a múlt havi számunkban.)

3. Ha egy szalagnak csak egy határa van, akkor a kettévágás után is csak 1 szalag marad belőle, aminek az egyik határa az eredeti határ lesz, a másik határ pedig a kettévágásnál keletkezik. A Möbius-szalagnak, ami csak félszer van megcsavarva, csak 1 határa van. Ha hosszában elfelezzük, egyetlen szalag marad belőle, ami 1-szer van megcsavarva és két határa van. Ebből a második kettévágásnál két ugyanilyen (de egymáson átfűzött) szalag jön létre, a harmadik kettévágásnál pedig ezekből keletkezik 2-2 újabb. A végén tehát összesen 4 szalagunk lesz, ezek közül bármely kettő át van fűzve egymáson, úgyhogy kissé össze lesznek gubancolódva.

7. Legyen $N = 1997^{1998}$. Az adott számok között a prímek száma az ún. prímszámtétel szerint „körülbelül" $N/\log N$. Ezzel szemben a négyzetszámok száma N-ig legfeljebb $\sqrt{N}$, a köbszámoké N köbgyöke stb. Általában addig számíthatunk (legalább egy) k-adik hatványra N-ig, ameddig $2^k \leq N$, azaz $k \leq \log_2 N$. Így a teljes hatványok száma legfeljebb $\sqrt{N} \cdot \log_2 N \ll N/\log N$, ha N, mint esetünkben is, „elég nagy".

8. A magából anyagot kidobó rakéta közismert példája mutatja, hogy egy (változó tömegű) rendszer akkor is gyorsulhat, ha nem hat rá külső erő. Eszerint az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenlet *nem* általános érvényű. Kevésbé ismert, hogy az impulzus *sem* számolható mindig az $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$ egyenletből. Ha például egymás után óvatosan, függőlegesen mozgatva ráhelyezzük az ujjainkat a zongora billentyűire, akkor a zongorához érő ujjakból álló rendszer tömegközéppontja vízszintesen mozog, de ehhez a mozgáshoz *nem* társul vízszintes impulzus.

9. Az Euler-tételből könnyű levezetni, hogy egy n csúcsú *konvex* poliédernek legfeljebb $2n-4$ lapja és $3n-6$ éle lehet. Ez az eset akkor áll elő, ha csupa háromszög határolja. Ha viszont a poliéder lyukakat is tartalmaz, akkor minden lyuk 4-gyel növeli a lapok és 6-tal az élek maximális számát, úgyhogy a poliédernek nagyon sok lapja és éle is lehet.

12. Gauss egy nevezetes tétele szerint pontosan azok a számok írhatók fel legfeljebb 3 négyzetszám összegeként, amelyek *nem* $4^k(8n+7)$ alakúak. Adott korlátig (ami esetünkben 10^{2000}) a tiltott alakú számok előfordulási aránya kisebb, mint az $1/8 + 1/32 + 1/128 + \ldots$ végtelen mértani sor összege, amely $1/6$. Tehát a legfeljebb 3 négyzetszám összegeként felírható (legfeljebb) 2000 jegyű számok gyakorisága (nagyon kevéssel) több, mint $1-(1/6) = 5/6$.

13. A mikrohullámú sütőben az időegységenként elnyelt energia kicsiny testeknél (melyekbe könnyen behatol az elektromágneses mező) a test térfogatával arányos. Kevés víz melegítésekor tehát a felforraláshoz szükséges idő független a víz mennyiségétől. Nagyobb vízmennyiség esetén azonban a behatoló energia nem a térfogattal, hanem közelítőleg a felülettel arányos. Egy kétszer nagyobb oldalélű „vízkocka" például négyszer nagyobb teljesítménnyel melegíthető, a hőkapacitása viszont nyolcszor nagyobb, tehát kb. kétszer annyi idő alatt forralható fel, mint a kisebb.

13 + 1. Aki nem tud angolul, az is meg tudja számolni az egyes szavak betűinek számát...