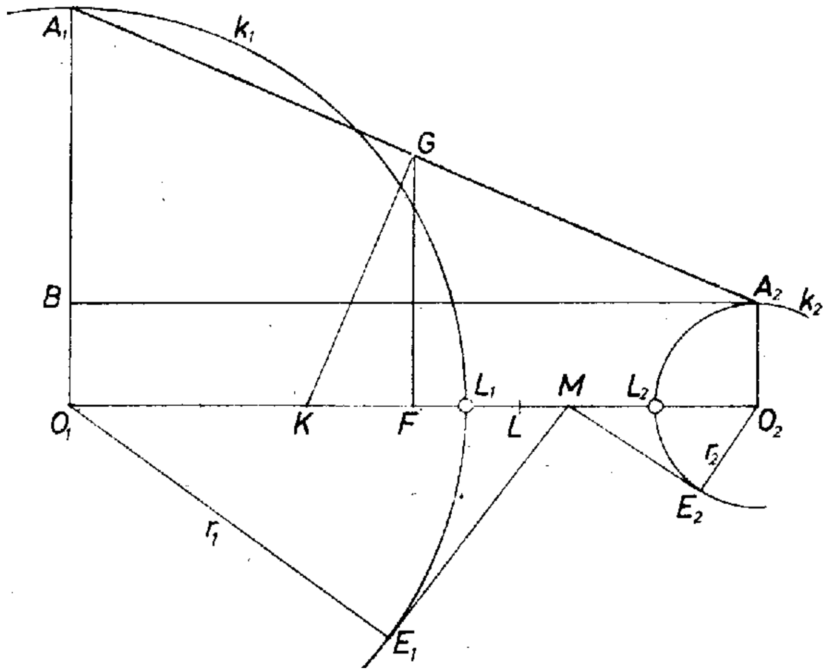
1. Jellemezzük először az olyan pontokat az O_1O_2 centrálisnak a két kör közé eső L_1L_2 szakaszán, amelyekre az állítás igaz.



Miközben egy M pont L_1-től L_2-ig halad, a belőle a k_1 és k_2 körhöz húzott érintőnek a körig terjedő ME_1 szakasza a szemlélet szerint nő, az ME_2 szakasza pedig csökken. Valóban, négyzeteik különbsége

$$y = ME_2^2 - ME_1^2 = (MO_2^2 - r_2^2) - (MO_1^2 - r_1^2) =$$
$$(MO_1 + O_2M)(MO_2 - MO_1) + (r_1^2 - r_2^2) =$$
$$O_1O_2(O_1O_2 - 2MO_1) + r_1^2 - r_2^2 = -2c \cdot O_1M + (c^2 + r_1^2 - r_2^2),$$

ahol $c = O_1O_2 (> r_1 + r_2)$, és ez $O_1M = x$ növekedésével monoton csökken. Ha $x = r_1$, akkor

$$y = (c - r_1)^2 - r_2^2 = O_2L_1^2 - O_2L_2^2 > 0,$$

ha pedig $x = O_1L_2 = c - r_2$, akkor

$$y = r_1^2 - (c - r_2)^2 = O_1L_1^2 - O_1L_2^2 < 0,$$

tehát az $y = 0$ értéket adó egyetlen L pont az L_1L_2 szakaszon van, és

$$O_1L = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c} = \frac{c}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2c},$$

vagyis L a kisebbik kör középpontjához van közelebb, illetve éppen O_1O_2 felezőpontjában van, ha $r_1 = r_2$.

2. Számítsuk ki másrészt az O_2K szakasz hosszát. Ha ezt egyenlőnek találjuk O_1L-lel, akkor K és L az O_1O_2 szakaszon szimmetrikusan helyezkednek el és ez bizonyítja az állítást. Választhatjuk úgy az indexeket, hogy $r_1 \geq r_2$ legyen, továbbá jelöljük O_1O_2 és A_1A_2 felezőpontját F-fel, G-vel, A_2-nek O_1A-n levő vetületét B-vel. Ekkor K az O_1F szakaszon van, vagy éppen F-ben, és a KFG, A_1BA_2 derékszögű háromszögek hasonlósága alapján

$$FK = BA_1 \cdot \frac{FG}{BA_2} = (r_1 - r_2)\frac{r_1 + r_2}{2c} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2c},$$

hiszen FG az $O_1A_1A_2O_2$ derékszögű trapéz középvonala. Így tüstént látjuk, hogy $O_2K = O_2F + FK$ kifejezése egyezik O_1L fenti kifejezésével. Az állítást bebizonyítottuk.