[1] A feladatok szövegét az októberi számunkban közöltük.

Kísérleti forduló

Torziós inga

a) Az összetett rendszer tömegközéppontja a forgástengelytől

$$R(x) = \frac{M_1 R_1 + M_2(x - l/2)}{M_1 + M_2}$$

távolságra van.

b) Az ingatestet tömegközéppontjának a végétől számított $R(x)$ távolságát vízszintes helyzetben mérhetjük meg. Az alkalmas helyen alátámasztott (kiegysúlyozott) ingánál különböző x_i értékek $R(x_i)$ könnyen mérhető. A mérési adatokat milliméterpapíron ábrázolva, majd azokra egyenest illesztve leolvashatjuk az $R(x) \approx ax + b$ összefüggésnek meg felelő $a = M_2/(M_1 + M_2)$ arányt, majd (a megadott $M_1 + M_2$ ismeretében) ebből a tömegeket külön-külön is kiszámíthatjuk. Az így mért M_1 és M_2 mérési pontosságára az illesztett egyenes a meredekségének bizonytalanságából következtethetünk.

c) Az inga teljes tehetetlenségi nyomatéka az x paraméter függvényében:

$$I(x) = I_1 + I_2(x) = M_2 x^2 - M_2 l x + \left(I_1 + \frac{M_2}{3} l^2 \right).$$

d) A függőleges forgástengelyű inga mozgásegyenlete:

$$I(x) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0).$$

A vízszintes tengelyű elrendezésnél a fenti mozgásegyenlet jobb oldalát a súlyerő forgatónyomatékának megfelelő taggal kell kiegészítenünk:

$$I(x) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0) + (M_1 + M_2)\, g \cdot R(x) \sin\theta.$$

e) és **f)** Az egyensúlyt jellemző θ_e szöget az inga felső végpontjának helyzetét megadó koordinátákból számíthatjuk ki. Ezek a koordináták a rendelkezésre álló háromszögvonalzó és az asztalra terített milliméterpapír segítségével jól mérhetők. Egyensúlyban fennáll a

$$-\kappa(\theta - \theta_0) + (M_1 + M_2)\, g \cdot R(x) \sin\theta = 0$$

összefüggés. Különböző x_i értékek mellett mérve $\vartheta_{e,i}$ egyensúlyi szögkitérést és a mérési adatokból kiszámítva az

$$y_i = (M_1 + M_2)\, g \cdot R(x_i) \sin\theta_{e,i}$$

mennyiségét, y_i és $\theta_{e,i}$ között lineáris kapcsolatot várhatunk:

$$y_i = \kappa\theta_{e,i} - \kappa\theta_0.$$

A mérési adatokra illesztett egyenes meredekségéből κ (és annak mérési hibája is) leolvasható.

g) A függőleges tengelyű inga lengésideje és a tehetetlenségi nyomatéka között fennáll az

$$I(x) = \frac{\kappa T^2(x)}{4\pi^2}$$

összefüggés (lásd a megfelelő mozgásegyenletet és annak ismert megoldását). Ez az összefüggés (felhasználva $I(x)$ korábban kiszámított alakját) így is felírható:

$$\frac{\kappa}{4\pi^2} T^2(x) - M_2 x^2 = -M_2 l x + \left(I_1 + \frac{M_2}{3} l^2 \right).$$

A fenti egyenlet bal oldalán mérhető, illetve ismert mennyiségek állnak. Ezek mért értékeit x függvényében ábrázolva az illesztett egyenes meredekségéből és tengelymetszetéből a keresett l és I_1 meghatározható.

h) A vízszintes tengelyű (a függőlegeshez közeli egyensúlyi helyzetű) inga torziós lengéseinek $T(x)$ periódusidejét különböző x értékek mellett stopperral mérhetjük. A lengésidő x függvényében egyetlen (viszonylag éles) maximummal rendelkező görbével szemléltethető.

Elméleti forduló

1. feladat. *Sugárzás elnyelődése gázban.*

a) A tartályban levő gáz nyomása a folyamat során nem változik:

$$p = p_0 + \frac{mg}{r^2\pi} = 102{,}3 \text{ kPa}.$$

A gáztörvény szerint $pV = nRT$, ahonnan az állandó nyomáson táguló gázra

$$\Delta T = \frac{p\Delta V}{nR} = \frac{1{,}02 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05^2\pi \cdot 0{,}03}{0{,}1 \cdot 8{,}31} = 28{,}9 \text{ K}.$$

A gáz tehát 48,9 °C-ra melegszik fel.

b) A $p = p_0 + (mg/(r^2\pi)$ nyomású gáz, miközben a besugárzás hatására az üveglap Δs távolságnyit elmozdul, $W = p\Delta V = p_0\Delta V + mg\Delta s = 24$ J munkát végez. Ebből a munkából 0,24 J az üveglap helyzeti energiájának növelésére, 23,8 J pedig ahhoz szükséges, hogy a dugattyú a légkört egy kicsit „megemelje”.

c) A folyamat során elnyelt sugárzási energia (hő):

$$Q = nC_V\Delta T + W = 60{,}1 \text{ J} + 24{,}0 \text{ J} = 84{,}1 \text{ J}.$$

d) A lézer sugárzási teljesítménye (vagyis a gáz által elnyelt teljesítmény) $P = Q/\Delta t = 8{,}4$ W.

A gáz által időegységenként elnyelt fotonok száma

$$\frac{P}{hf} = 2{,}2 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

e) Az elnyelt fényenergia

$$\eta = \frac{mg\Delta s}{Q} = 0{,}0028$$

része, vagyis mindössze 0,3 %-a alakul át az üveglap mechanikai helyzeti energiájává.

f) A tartály elforgatásakor a gáz nyomása is és a hőmérséklete is megváltozik. A nyomás a külső légnyomással fog megegyezni, vagyis 102,3 kPa-ról 101,3 kPa-ra csökken. A folyamat során nem közlünk hőt a gázzal, a tágulás tehát adiabatikus, melyre fennáll a $pV^\kappa =$ állandó összefüggés, ahol

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \approx 1{,}4.$$

Ebből és az általános gáztörvényből adódik, hogy a gáz hőmérséklete az elfordítás után

$$T_1 = 322 \text{ K} \cdot \left(\frac{101{,}3}{102{,}3}\right)^{0{,}29} \approx 321 \text{ K},$$

tehát mindössze 1 fokkal hűl le.

2. feladat. V-*alakú áramvezető mágneses tere.*

a) A mágneses indukcióvektor (a Biot–Savart-törvény alapján) a P pontban a papír síkjára merőlegesen, felfelé mutat.

b) A megadott formula $\alpha = \pi/2$ esetben (egyenes vezetőre) is igaz. Ekkor viszont az Ampére-törvény értelmében

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = k \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4},$$

ahonnan a keresett arányossági tényezőre

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

c) A P^* pontban (P-nek a csúcspontra vonatkoztatott tükörképében) a mágneses indukció a papír síkjára merőlegesen lefelé mutat. A nagyságát többféle gondolatmenettel is meg tudjuk határozni.

Érvelhetünk úgy, hogy ha α helyébe $(\pi - \alpha)$-t írunk, vagyis a V-alakú vezetéket „kifordítjuk”, akkor a P pont a vezetékhez képest éppen olyan helyzetbe kerül, mint amilyenben a P^* pont volt az eredeti vezetékhez képest. Eszerint

$$|\mathbf{B}(P^*)| = k \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = k \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Másfajta megfontolással, a végtelen egyenes vezető mágneses terének ismeretét felhasználva is eljuthatunk a fenti eredményhez. Egészítsük ki gondolatban a V-alakú vezetéket egy másik, ugyanakkora árammal átjárt V-alakkal úgy, hogy két egymást metsző végtelen egyenes vezetőt kapjunk. A kérdéses P^* pont mindkét vezetőtől $d\sin\alpha$ távolságra van. A két vezeték mágneses terét szuperponálhatjuk, és kihasználhatjuk, hogy a végtelen egyenes vezető mágneses terét ismerjük:

$$|\mathbf{B}(P^*)| + |\mathbf{B}(P)| = 2 \cdot \frac{\mu_0 i}{2\pi d \sin\alpha},$$

ahonnan

$$|\mathbf{B}(P^*)| = k \cdot \left(\frac{2}{\sin\alpha} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = k \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

d) Ha egy μ mágneses dipólmomentumú, csapágyazott tengelyű mágnest B indukciójú mágneses térben az egyensúlyi helyzetéből kicsiny φ szöggel kitérítünk, a mágnesre

$$M(\varphi) = -\mu \cdot B \cdot \sin\varphi \approx -\mu \cdot B \cdot \varphi$$

forgatónyomaték hat. Innen (a rezgőmozgás ismert képleteivel összevetve) leolvasható, hogy a torziós lengések periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mu B}} \propto \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

e) A két elméletnek a torziós lengések periódusidejére vonatkozó jóslatának aránya:

$$\frac{T_{\text{Ampère}}}{T_{\text{Biot-Savart}}} = \sqrt{\frac{B_{\text{Biot-Savart}}}{B_{\text{Ampère}}}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi\operatorname{tg}(\alpha/2)}}.$$

Ez az arány $\alpha \to \pi/2$ szögeknél (vagyis az egyenes vezető határeseténél) 1-hez tart. A másik határesetben, nagyon kicsiny α szögeknél (nagyon „hegyes" V-alaknál) $\sqrt{4/\pi} = 1{,}13$, tehát itt sem tér el nagyon a két elmélet jóslata. A mérhetőség feltétele az, hogy a két jóslat legalább 10 százalékkal eltérjen egymástól, vagyis

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi\operatorname{tg}(\alpha/2)}} > 1{,}1$$

teljesüljön. Ezt az egyenlőtlenséget közelítőleg (pl. próbálgatással) egy zsebszámológép segítségével könnyen meg lehet oldani, s a kérdéses szögtartományra $\alpha < 0{,}77$ rad $= 44^\circ$ adódik.

3. feladat. *Űrszonda a Jupiter gravitációs terében.*

a) A Jupiter keringési sebessége a Nap körül a

$$\frac{V^2}{R} = \frac{GM_S}{R^2}$$

mozgásegyenletből számítható:

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \approx 1{,}306 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

(A feladat szövegében megadott adatok között szerepelt a Jupiter pályasugara és keringési ideje. Ebből a két számból is kiszámítható a kérdéses — egyenletes körmozgásnak megfelelő — sebesség.)

b) A Nap és a Jupiter gravitációs vonzóerejének nagysága akkor egyenlő, ha fennáll

$$\frac{GMm}{x^2} = \frac{GM_S m}{(R-x)^2},$$

ahol x a Jupitertől mért távolság, M pedig a Jupiter tömege. Innen

$$x = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M_S} + \sqrt{M}} R = 0{,}02997\, R = 2{,}333 \cdot 10^{10} \text{ m}.$$

c) A Naphoz rögzített vonatkoztatási rendszerből (ahol a szonda sebessége: $v_x = 0$; $v_y = v_0$) egyszerű Galilei-transzformációval térhetünk át a Jupiter V sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerébe. Itt

$$v_x = V, \qquad v_y = v_0,$$

ahonnan

$$v=\sqrt{V^2+v_0^2}=1{,}65\cdot 10^4\ \mathrm{m/s} \qquad \text{és} \qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{V}=0{,}653\mathrm{rad}=37{,}4^\circ.$$

d) A Jupiter vonatkoztatási rendszerében (a Jupitertől elegendően távol, de nem „végtelen messze") a szonda teljes E mechanikai energiája jó közelítéssel a mozgási energiájával egyenlő:

$$E\approx\frac{1}{2}mv'^2=112\ \mathrm{GJ}.$$

e) Az űrszonda pályájának polárkoordinátákkal kifejezett egyenlete a Jupiter vonatkoztatási rendszerében:

$$\frac{1}{r}=\frac{GM}{v'^2b^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}\cos\theta\right).$$

(b az hiperbola alakú pályagörbe aszimptotáinak távolsága a vonzócentrumtól, az ún. impakt paraméter.) Mivel az r vezérsugár nem lehet negatív szám, a mozgás során csak olyan θ polárszögek fordulhatnak elő, melyekre

$$\cos\theta\ge-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\theta=\theta_\pm=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}\right).$$

Az eltérülés szöge (lásd a feladat múlt hónapban közölt szövegénél a *9. ábrát*)

$$\Delta\theta=(\theta_+-\theta_-)-\pi=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^4b^2}{G^2M^2}}}.$$

f) A szonda akkor kerül a legközelebb a Jupiterhez, amikor $\theta=0$. A legkisebb távolság a bolygótól (a pályagörbe egyenlete szerint):

$$r_{\min}=\frac{v'^2b^2}{GM}\left(1+\sqrt{1+\frac{v'^4b^2}{G^2M^2}}\right)^{-1},$$

ahonnan a kérdéses legkisebb impakt paraméter

$$b=\sqrt{r_{\min}^2+\frac{2GM}{v'^2}r_{\min}}.$$

Ugyanez az eredmény közvetlenül is megkapható az energia- és a perdületmegmaradás törvényéből, ha azokat a szonda legtávolabbi és a legközelebbi helyzeteire alkalmazzuk.)

Feltevéseink szerint a szonda nem kerülhet közelebb a Jupiter középpontjához, mint a bolygó sugarának háromszorosa. A fenti összefüggések szerint ennek az a feltétele, hogy

$$b\ge b_{\min}=\sqrt{9R_B^2+\frac{6GM}{v'^2}R_B}\approx 7{,}0\,R_B=4{,}9\cdot 10^8\mathrm{m},$$

és az ennek megfelelő (legnagyobb) eltérülési szög:

$$\Delta\theta_{\max}=1{,}256\ \mathrm{rad}=87{,}4^\circ.$$

g) A Jupiter vonatkoztatási rendszerében a szonda sebessége az eltérítés után is v', iránya pedig $\theta_0+\Delta\theta$ szöget zár be az x tengellyel. A Nap vonatkoztatási rendszerébe egy újabb Galilei-transzformációval térhetünk vissza:

$$v_x''=v'\cos(\theta_0+\Delta\theta)-V,$$

$$v_y''=v'\sin(\theta_0+\Delta\theta).$$

Innen – algebrai átalakítások után – megkaphatjuk a szonda sebességének nagyságát a Nap koordináta-rendszerében:

$$v''=\sqrt{v_x''^2+v_y''^2}=\sqrt{v_0(v_0+2V\sin\Delta\theta)+2V^2(1-\cos\Delta\theta)}.$$

h) A legnagyobb megengedett értékű szögeltérülésnél a szonda végsebessége: $v''=2{,}62\cdot 10^4$ m/s.

Gnädig Péter