$$\min\big(f(a), f(b)\big) < f(x) < \max\big(f(a), f(b)\big) \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy következik. Legyen v tetszőleges valós szám, és mondjuk azt, hogy az $x \neq v$ szám kicsi, ha $f(x) < f(v)$, és nagy, ha $f(x) > f(v)$. Az nem lehet, hogy $f(x) = f(v)$ legyen, hiszen akkor egyetlen x, v közti u-ban sem tudnánk $f(u)$-nak megfelelő értéket találni. Az sem lehet, hogy a v-nél kisebb számok között kicsik is, nagyok is legyenek. Ha ugyanis az $x_1 < v$, $x_2 < v$ számok különböző típusúak volnának, válasszuk a-nak közülük a kisebbiket, b-nek v-t, és x-nek x_1, x_2 közül a másikat. Ebben a szereposztásban nem teljesülhet (1), mert most nem $f(x)$ esik $f(a)$, $f(b)$ közé, hanem $f(b)$ az $f(a)$, $f(x)$ közé.

Hasonlóan kapjuk, hogy egyformák a v-nél nagyobb számok is. Nem lehetnek azonban ugyanolyan típusúak, mint a v-nél kisebbek. Ha ugyanis az a, b számok egyformák volnának (vagy mindkettő kicsi, vagy mindkettő nagy volna), és közrefognák v-t, $f(a)$, $f(b)$ nem foghatná közre $f(v)$-t. Nevezzük a v-t növő számnak, ha a nála kisebbek kicsik, és a nála nagyobbak nagyok, és fogyónak, ha a kisebbek nagyok, és a nagyobbak kicsik.

Tudjuk már, hogy minden szám vagy növő, vagy fogyó. Megmutatjuk, hogy eszerint az osztályozás szerint a számok egyformák. Ha ugyanis a $v_1 < v_2$ számok nem volnának egyformák, sem $f(v_1) < f(v_2)$ nem lehetne, (mert akkor v_1 is, v_2 is növő volna), sem $f(v_1) > f(v_2)$ nem lehetne, (mert így mindkettő fogyó volna). Nyilván $f(v_1) = f(v_2)$ sem lehet, tehát a számok valóban egyformák. Ha mind növő, f is növő, ha pedig mind fogyó, f is fogyó. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.