A fizika OKTV-t az előző évek gyakorlatához hasonlóan az elmúlt tanévben is három kategóriában és három fordulóban rendezték meg. Az első (iskolai) és a második (megyei) fordulón elméleti problémákat, a harmadik fordulón pedig mérési feladatokat oldottak meg a versenyzők. A végső sorrendet a második és a harmadik fordulóban elért pontszám összege alapján állapította meg a versenybizottság.
Az alábbiakban ismertetjük a verseny II. fordulójának feladatait és azok megoldását.[1] Az elméleti forduló feladatairól és azok megoldásairól *Holics László:* Versenyfeladatok II. című könyvében (TypoTEX Kiadó, 1997.) olvasható részletes beszámoló.

Az I. kategória (szakközépiskolások) feladatai

1. feladat. $L = 1$ m *hosszúságú, vékony, homogén pálca egyik végéhez* (A) *a pálcára merőleges tengely van erősítve, amelynél fogva egy kampóra függesztettük. A pálcát a vízszintesig kitérítjük, majd kezdősebesség nélkül elengedjük. A kampó olyan (kisméretű) körívet alkot, hogy a pálca elhagyja a kampót amikor a függőlegessel* $\alpha = 30°$*-os szöget alkot.*

Mekkora szöget alkot a pálca a vízszintessel abban a pillanatban, amikor középpontja (S) *a kampótól való elválás után a legmagasabbra kerül?*

(Holics László)

Megoldás. Amikor a pálca elválik a kampótól, tömegközéppontja ferde hajítást végez. Közben a pálca a már megszerzett szögsebességével egyenletesen forog (a homogén nehézségi erőnek nincs a tömegközéppontra vonatkoztatva forgatónyomatéka). Meghatározzuk a tömegközéppont (S) elváláskori pillanatnyi sebességének nagyságát és irányát valamint a pálca szögsebességét, a hajítás emelkedési idejét, majd ebből a pálca szögelfordulását, végül a vízszintessel bezárt szögét.

A munkatételből:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{A}}\omega^2,$$

ahonnan a szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\cos\alpha}.$$

Innen a tömegközéppont sebessége: $v = L\omega/2$. A hajítás szöge ugyancsak α. Ezzel a hajítás sebességének függőleges összetevője: $v_y = v\sin\alpha$. Az emelkedés ideje (a maximális magasság elérésének pillanata a hajítás kezdetétől számítva):

$$\Delta t_{\mathrm{em}} = \frac{v_y}{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3L}{g\cos\alpha}}\cdot\sin\alpha.$$

A pálca szögelfordulása ezalatt:

$$\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t_{\mathrm{em}} = \sqrt{\frac{3g}{L}\cos\alpha}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3L}{g}\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha\sin\alpha = \frac{3}{4}\sin 2\alpha.$$

A pálca vízszintessel bezárt hajlásszöge a ferde hajítás kezdetén: $\varepsilon = (\pi/2) - \alpha = 60°$, kérdéses pillanatban pedig:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\sin\ 2\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\sin 60° = 0,398\ \mathrm{rad} = 22,8°.$$

2. feladat. *Az* $AB = 1$ m *hosszú, szakasz végpontjaiban két* $Q = 10^{-6}$ C *nagyságú pozitív töltés van rögzítve. A szakasz egyik felezőmerőlegesének valamely* C *pontjából nyugalomból elengedünk egy* $m = 1$ g *tömegű és* $Q^* = -10^{-6}$ C *töltésű pontszerű testet. Ez a test az* AB *szakaszra* $v = 3$ m/s *sebességgel érkezik.*

a) Milyen messze van a C *pont az* AB *szakasztól?*

b) Milyen mozgást végez a test? Ábrázoljuk közelítően az erőt az AB *szakasztól való távolság függvényében!*

c) A test mozgása során hol veszi fel a sebesség és a gyorsulás legnagyobb és a legkisebb értékét? Mekkorák ezek az értékek? (A folyamat légüres térben és súlytalanság állapotában megy végbe.)

(Blészer Jenő)

Megoldás. *a)* A testre ható erők eredője az AB szakaszra merőleges, tehát a test az AB szakaszt az F felezőpontban éri el. Keressük a CF szakasz hosszát.

Írjuk fel a C és F pontbeli energiákat! (A numerikus számításnál SI egységeket használunk.) C-ben a mozgási energia nulla, a helyzeti energia pedig

$$E_C^{(\mathrm{h})} = 2\cdot k\frac{QQ^*}{\sqrt{d^2+x^2}} = -\frac{18\cdot 10^{-3}}{\sqrt{0,5^2+x^2}},$$

[1] *

ahol $d = \frac{1}{2}AB$. Az F pontban a mozgási energia:

$$E_F^{(\mathrm{m})} = \frac{1}{2}mv^2 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J},$$

a helyzeti energia pedig

$$E_F^{(\mathrm{h})} = 2 \cdot k\frac{QQ^*}{d} = -36 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$-36 \cdot 10^{-3} + 4{,}5 \cdot 10^{-3} = -\frac{18 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{0,5^2 + x^2}},$$

ahonnan a keresett $x = FC$ távolságra 0,277 m = 27,7 cm adódik.

b) A test az F pontot elhagyva az energiamegmaradás törvénye alapján a felező merőlegesen továbbhaladva egy olyan C' pontig jut el, amelyre $FC' = 27{,}7$ cm, és ott visszafordul. A mozgás ezután ismétlődik, azaz 27,7 cm amplitúdójú rezgőmozgás jön létre, amely azonban nem harmonikus rezgés, mert az eredő erő a kitéréssel *nem* egyenesen arányos.

Az F_e eredő erő az y kitérés függvényében így adható meg:

$$F_\mathrm{e}(y) = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\frac{y}{(0,25 + y^2)^{3/2}}.$$

Zsebszámológép segítségével értéktáblázatot készíthetünk és ábrázolhatjuk is az eredő erőt *(6. ábra)*. Látható, hogy viszonylag nagy kitérés-tartományban az erőfüggvény lineárisnak tekinthető, itt tehát harmonikus rezgést végezhet a test.

c) A sebesség a szélső helyzetekben zérus, az AB szakasz felezőpontjában pedig maximális, 3 m/ s nagyságú. Az $y = 0$ értékhez tartozó eredő erő $F_\mathrm{e} = 0$, itt a gyorsulás $a = 0$. A legnagyobb kitéréshez ($y = 0,277$ m) tartozó eredő erő: $F_\mathrm{e}^{\max} = 0,0267$ N, és itt a legnagyobb a gyorsulás: $a_{\max} = F_\mathrm{e}^{\max}/m = 26,7\ \mathrm{m/s}^2$.

3. feladat. *Egy ideális gázzal körfolyamatot végzünk. Az egyes részfolyamatokhoz tartozó hőkapacitások a következők:*

1. részfolyamat: $T \rightarrow 4T$, *a hozzá tartozó hőkapacitás* 13 *egység (nem állandó, hőmérsékleti átlagérték);*

2. részfolyamat: $4T \rightarrow 2T$, *a hozzá tartozó hőkapacitás* 10 *egység (állandó);*

3. részfolyamat: $2T \rightarrow T$, *a hozzá tartozó hőkapacitás* 14 *egység (állandó).*

A részfolyamatok között van egy izochor és egy izobár.

a) Hány atomos a gáz?

b) Mekkora a körfolyamat hatásfoka?

c) Hányszorosa a gáz kezdeti T *hőmérséklettől a második részfolyamat* $3T$ *hőmérsékletéig végzett munkája az egész körfolyamat alatt végzett munkájának?*

(Szvetnik Endre)

Megoldás. *a*) Mivel

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5},$$

$f = 5$-nek kell lennie, tehát a gáz 2 atomos.

b) Az állandó nyomáshoz tartozó hőkapacitás minden ideális gáznál nagyobb, mint az állandó térfogathoz tartozó, így a második részfolyamat az izochor, a harmadik részfolyamat pedig az izobár. (Az első azért nem lehet izobár, noha nagyobb a második folyamat hőkapacitásánál, mert nem állandó érték.)

A $p-V$ állapotsíkon az első részfolyamat nem ábrázolható egyértelműen a hőkapacitás átlagértékének a részletekre vonatkozó információszegénysége miatt, a gázzal közölt hő azonban így is meghatározható. Mivel a körfolyamat során $\Delta E = 0$, a gáz által végzett munka a felvett hővel egyenlő. Az I. főtétel szerint: $\Delta E_\mathrm{b} = Q_{\text{gázzal}} + W_{\text{gázon}} = 0$, azaz $W_{\text{gázon}} = -Q_{\text{gázzal}}$, és így $W_{\text{gáz által}} = Q_{\text{gázzal}}$. Ezzel a hatásfok:

$$\eta = \frac{W_{\text{gáz által}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{Q_{\text{gázzal}}}{Q_{\text{fel}}} =$$
$$= \frac{13 \cdot (4T - T) + 10 \cdot (2T - 4T) + 14 \cdot (T - 2T)}{13 \cdot (4T - T)} = \frac{5}{39} \approx 0,13 = 13\%.$$

(Az $\eta = \dfrac{Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$ összefüggésből is ez adódik, hiszen a negatív közölt hő nagysága a leadott hő.)

c) A gáz által végzett munkát az első főtételből határozzuk meg.

$$\Delta E_\mathrm{b} = -\,W_{\text{gáz által}} + Q_{\text{gázzal}},$$

$$W_{\text{gáz által}} = Q_{\text{gázzal}} - \Delta E_{\text{b}} =$$
$$= 13\frac{\text{egység}}{\text{K}} \cdot (4T - T) + 10\frac{\text{egység}}{\text{K}} \cdot (3T - 4T) - 10\frac{\text{egység}}{\text{K}} \cdot (3T - T) = 9\,\frac{\text{egység}}{\text{K}} T.$$

Kihasználtuk, hogy $\Delta E_{\text{b}} = C_V \Delta T$ bármilyen folyamat esetén. A hatásfok meghatározásánál már meghatároztuk a gáz által az egész körfolyamat alatt végzett munkát: $W_{\text{gáz által}} = 5$ egység $\cdot\, T$, tehát a kérdezett hányados:

$$\frac{W_{\text{gáz által}(T \to 3T)}}{W_{\text{gáz által (kör)}}} = \frac{9T}{5T} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

A II. és III. kategória (valamennyi gimnazista) feladatai

1. feladat. *Egy m tömegű, könnyen gördülő kiskocsihoz l hosszúságú, lazán lelógó fonalat kötöttünk, amelynek a másik vége egy $2m$ tömegű kiskocsihoz szerelt D direkciós erejű csavarrugóhoz csatlakozik az ábra szerint. A rugó összenyomásra is működik és tengelye mindig egyenes marad. A $2m$ tömegű kocsit v_0 sebességgel meglökjük.*

a) A fonál megfeszülésétől számítva mennyi idő múlva ér a hátsó kocsi a rugóhoz?

b) Mennyi idő múlva feszül meg ismét a fonál?

($m = 8$ kg, $D = 23,3$ N/m, $l = 1$ m, $v_0 = 2$ m/s.)

(Holics László)

Megoldás. *a*) A fonál első megfeszülésétől első meglazulásáig tulajdonképpen egy „rugalmas ütközés” megy végbe (nem a szokásos rugalmas „tolás”, hanem rugalmas „rántás” formájában). Erre külső erők hiányában az impulzus, disszipatív erők hiányában pedig a mechanikai energia megmaradása érvényes.

Ez az ütközés egy fél harmonikus rezgésből áll. Térjünk át tömegközépponti koordináta-rendszerre! A fonál megfeszülése pillanatától az m_1, illetve m_2 tömegű kiskocsi valamekkora t idő alatt Δx_1, illetve Δx_2 utat tesz meg. A tömegközéppont mozgásának tétele alapján:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{1}$$

Ugyanakkor a rugó által (mindkét testre) kifejtett erő nagysága:

$$F = D(\Delta x_1 + \Delta x_2). \tag{2}$$

(1)-ből Δx_2-t kifejezve és (2)-be írva:

$$F = D\left(\Delta x_1 + \frac{m_1}{m_2}\Delta x_1\right) = D\frac{m_1 + m_2}{m_2}\Delta x_1 = D_1^* \Delta x_1. \tag{3}$$

Ezzel az m_1 tömegű (és hasonlóképpen szimmetrikusan az m_2 tömegű) kocsi fél rezgésideje:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m_1}{D_1^*}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{D(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2m}{3D}} = \sqrt{\frac{16\text{ kg}}{3 \cdot 23,3\text{ N/ m}}} = 1,5\text{ s}.$$

Megjegyzés. Ugyanezt a számszerű eredményt kapjuk az m_2 tömeg kocsira is, amelyre $D_2^* = 3D$, míg $D_1^* = \frac{3}{2}D$ volt.

A két kocsi egymáshoz viszonyított (relatív) sebessége a félrezgés kezdetéig $v_{\text{rel}} = v_0 = 2$ m/s volt, így a félrezgés befejezésekor a szimmetria miatt ennek -1-szerese, tehát a hátsó kocsinak a rugóval való ütközéséig még eltelik

$$t_2 = \frac{l}{v_0} = \frac{1\text{ m}}{2\text{ m/s}} = 0{,}5\text{ s}$$

idő. A fonál megfeszülésétől a rugóval való ütközésig tehát összesen $t = t_1 + t_2 = 1{,}5\text{ s} + 0{,}5\text{ s} = 2$ s telik el.

b) Mivel a folyamat tükrös (a rugó összenyomódásától ellazulásáig a periódusidő másik fele telik el,) és a relatív sebesség -1-szerese a kezdeti értéknek, a fonál a kocsi rugóval való érintkezésétől számítva a fonál másodszori megfeszüléséig ugyancsak 2 s, a fonál első megfeszülésétől számítva pedig összesen 4 s idő telik el.

2. feladat. *Egy téglalap alakú, homogén tömegeloszlású, elhanyagolható ellenállású zárt vezetőkeret egyik szimmetriatengelye körül foroghat. A keret homogén, síkjára merőleges, B indukciójú, időben állandó mágneses mezőben nyugszik és benne nem folyik áram. A keret egyik oldalát meglökjük és a keret forogni kezd. A keret területe A, önindukciós tényezője L. A tengely súrlódása elhanyagolható.*

a) Hogyan változik a keretben folyó áram erőssége az elfordulás szögének függvényében?

b) Határozza meg, hogy a keret mely helyzetében maximális a mágneses mezőnek a keretre ható forgatónyomatéka!

(Szegedi Ervin)

Megoldás. *a)* A megoldás egyik kulcsa, hogy a keret ellenállása elhanyagolható. Ez azt jelenti, hogy a keret anyagának belsejében az elektromos térerősség (makroszkópikusan értve) nulla, mert különben végtelen nagy áramnak kellene folynia. Alkalmazzuk Maxwell II. törvényét a keret mentén:

$$\sum^{\bigcirc} \vec{E}\Delta\vec{s} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0.$$

A keret által körülvett teljes mágneses fluxus tehát nem változhat a mozgás során. Mivel a kezdeti fluxusérték $\Phi = B \cdot A$ volt, ezért ugyanennyi kell legyen a keret bármely helyzetében.

Egy φ szögű helyzetben a keret fluxusa egyrészt a B indukciójú mezőtől származik ($B \cdot A \cdot \cos\varphi$), másrészt a keretben indukálódott i áram által keltett mágneses tértől ($L \cdot i$). A teljes fluxus tehát: $B \cdot A \cdot \cos\varphi + L \cdot i$. A fluxus állandósága miatt azonban: $B \cdot A = B \cdot A \cdot \cos\varphi + L \cdot i$. Innen az áramerősség: $i = \frac{B \cdot A}{L}(1 - \cos\varphi)$. A maximális áramerősség $\cos\varphi = -1$-nél, azaz $\varphi = \pi$-nél adódik:

$$i_{\max} = \frac{2B \cdot A}{L}.$$

Megjegyzés. A $\varphi = \pi$-nél létrejövő $i_{\max} \cdot L = 2B \cdot A$ összefüggés érthető is, hiszen a külső tértől származó fluxus (a keret átfordulása miatt) $-B \cdot A$, ezért a „saját” fluxusnak $+2B \cdot A$-nak kell lennie, hogy a teljes fluxus $+B \cdot A$ maradjon.

b) A keretre mozgás közben $M(\varphi) = -B \cdot A \cdot i \cdot \sin\varphi$ forgatónyomaték hat. Felhasználva az áramerősségre kapott összefüggést, a forgatónyomaték így írható:

$$M(\varphi) = -\frac{(B \cdot A)^2}{L} \cdot \sin\varphi\,(1 - \cos\varphi).$$

A forgatónyomatékot vizsgálva látható, hogy 180°-os elfordulásig fékező nyomaték hat, ezt követően pedig átfordulást segítő. Megállapítható tehát, hogy a $\varphi = \pi$ helyzet a „holtpont”, ha a keret ezt a helyzetet (instabil egyensúlyi helyzet) eléri, akkor már túl is fordul. Az $M(\varphi)$ kifejezés szélsőértékeit megkaphatjuk, ha függvény néhány helyettesítési értékét zsebszámológéppel kiszámítjuk, és ezek alapján ábrázoljuk a függvényt. A *12. ábrán* látható, hogy a „maximális fékező forgatónyomaték” a függvény minimumhelyénél, kb. 120°-nál lép fel.

Megjegyzés. A függvény szélsőértéke differenciálszámítással is megkereshető. A $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi} = 0$ egyenlet megoldása megadja a minimum (és a maximum) helyét. Ez a feltétel a $2 \cdot \cos^2\varphi - \cos\varphi - 1 = 0$ másodfokú egyenletre vezet, amelynek (számunkra lényeges) megoldása: $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, azaz $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad $= 120°$.

3. feladat. *Egy henger belsejébe jó hővezető, rögzített fal p_0 nyomású, V_0 térfogatú, $T_0 = 280$ K hőmérsékletű héliumgázt zár be. A fal másik oldalán ugyancsak p_0 nyomású, V_0 térfogatú, T_0 hőmérsékletű héliumgáz van, amelyet egy dugattyú zár el a külső levegőtől. A henger és a dugattyú hőszigetelő anyagú és elhanyagolható hőkapacitású. A dugattyú lassú benyomásával a jobb oldali gázt $V_0/2$ térfogatra nyomjuk össze. Határozzuk meg ebben az állapotban a gázok hőmérsékletét!*

(Szegedi Ervin)

Megoldás. A jó hővezető fal és a lassú benyomás biztosítja, hogy a két gáz hőmérséklete egymással mindig megegyezik. Közbenső állapotban az állapothatározókat jelöljük az *ábra* szerint! Vizsgáljuk az összenyomás egy elemi részfolyamatát!

A teljes rendszerre felírt I. főtétel alapján (mivel $Q_{\text{összes}} = 0$):

$$\frac{f}{2} \cdot 2Nk\Delta T = -p\Delta V,$$

ami átrendezve ilyen alakot ölt:

$$\frac{2f}{2}Nk\Delta T = -p\Delta V. \qquad (1)$$

Írjuk fel még a jobb oldali gáz állapotegyenletét is:

$$pV = NkT. \qquad (2)$$

Vegyük észre, hogy az (1) és (2) egyenletek egy N részecskés, $2f$ szabadsági fokú ideális gáz adiabatikus állapotváltozásának egyenletei.

Megjegyzés. A bal oldali gáz termikus kölcsönhatása a jobb oldalival abban nyilvánul meg – a jobb oldali gáz szempontjából – , hogy megduplázódik a részecskék energiatároló szabadsági fokainak száma. Gondoljuk meg, hogy ez elég természetes, hiszen a gázok közötti energiaátadás miatt a munkával közölt energia fele akkora hőmérsékletváltozást okoz a jobb oldali gáznak, mint a tiszta adiabatikus kölcsönhatásban.

A vizsgált folyamatban tehát a jobb oldali gázra: $pV^\kappa =$ állandó, vagy más alakban: $TV^\kappa =$ állandó, ahol most

$$\kappa = \frac{2f+2}{2f} = \frac{f+1}{f}.$$

Héliumra $f = 3$, vagyis $\kappa = \dfrac{4}{3}$. A keresett hőmérséklet tehát:

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{3}} = T_0 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 1{,}26\, T_0 = 352{,}8 \text{ K}.$$

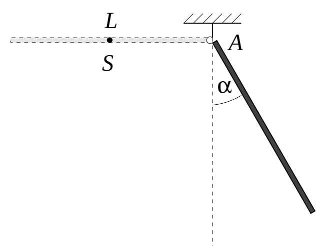
A verseny végeredménye

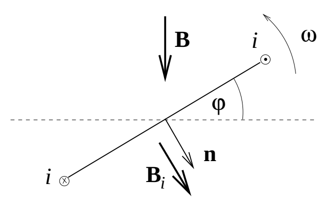
I. kategória: 1. **Szénási Tamás** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., IV. o.t.), tanára: Beregszászi Zoltán; 2. **Brezniczky János** (Eger, Wigner Jenő Műszaki Informatikai Középiskola, IV. o.t.), tanára: Nagyné Fodor Zsuzsanna; 3. **Schieber András** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., IV. o.t.), tanára: Beregszászi Zoltán.

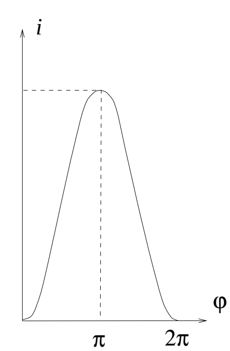
II. kategória: 1. **Kersch Péter** (Aszód, Petőfi S. Gimn., III. o.t.), tanárai: Kovács István, Kersch Gyula; 2. **Frenkel Péter** (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.), tanára: Horváth Gábor; 3. **Zawadowski Ádám** (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.), tanára: Horváth Gábor.

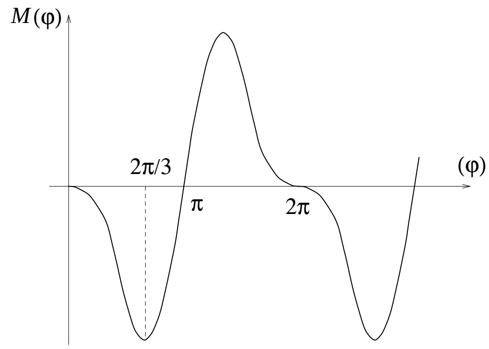
III. kategória: 1. **Kovács Gábor** (Sopron, Berzsenyi D. Evangélikus Líceum, IV. o.t.), tanárai: dr. Lang Jánosné, Piacsek István; 2. **Sexty Dénes** (Eger, Neumann J. Közgazd. Szki. és Gimn, IV. o.t.), tanára: Pecsenye Pálné; 3. **Nyakas Péter** (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o.t.), tanára: Vadvári Tibor.

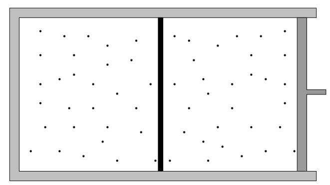
Holics László

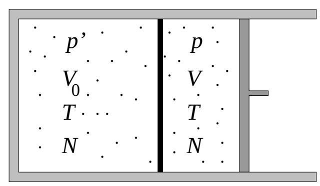


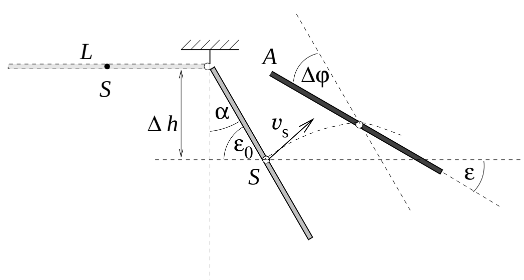


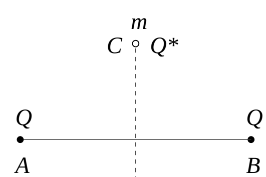


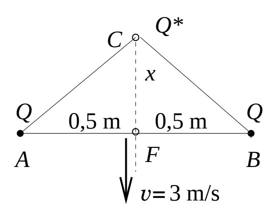

$M(\varphi)$
(φ)
$2\pi/3$
π
2π

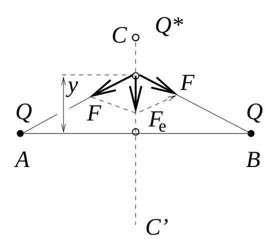


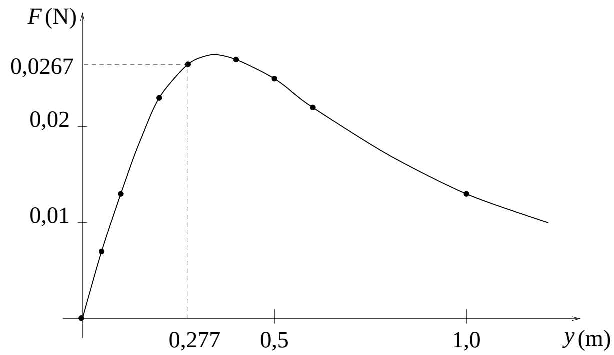

p'
V_0
T
N
p
V
T
N

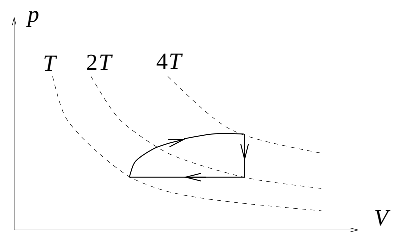

L
S
Δh
α
ε_0
S
v_s
A
$\Delta\varphi$
ε

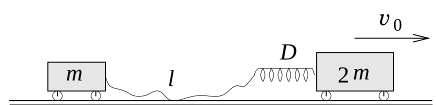

m
C
Q^*
Q
Q
A
B

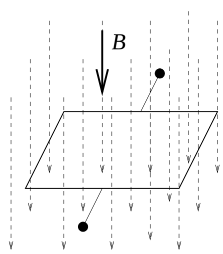

C
Q^*
x
Q
Q
0,5 m
0,5 m
A
F
B
$v = 3$ m/s


C
Q^*
y
F
F
F_e
Q
Q
A
B
C'


F (N)
0,0267
0,02
0,01
0,277
0,5
1,0
y (m)


p
T
2T
4T
V


v 0
D
m
l
2 m


B