(1) $$x^2+4y^2+8y+4\le 4x.$$

I. megoldás. Tegyük fel, hogy p olyan szám, amelyhez van olyan x, y, hogy $p=x+y$ és az x, y számok kielégítik az (1) egyenlőtlenséget. Ekkor (1)-ben y helyére $(p-x)$-et helyettesítve, a kapott

(2) $$5x^2-4(2p+3)x+4(p^2+2p+1)\le 0$$

egyenlőtlenségnek van megoldása x-re. A (2) egyenlőtlenség bal oldalán álló, x-ben másodfokú polinomnak tehát a diszkriminánsa nem negatív. Ebből p-re a következő feltételt kapjuk:

(3) $$-p^2+2p+4\ge 0.$$

Mivel a (3) egyenlőtlenség bal oldalán álló másodfokú polinomban p^2 együtthatója negatív, p értéke a polinom két gyöke között lehet (beleértve a gyököket is):

(4) $$1-\sqrt{5}\le p\le 1+\sqrt{5}.$$

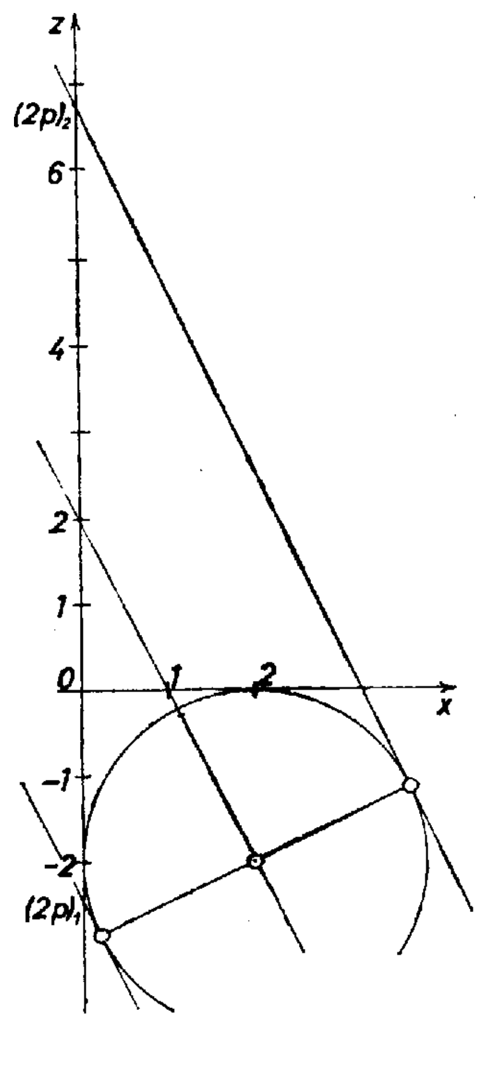
Megmutatjuk, hogy a (4) egyenlőtlenséget kielégítő bármelyik p szám megoldása e feladatnak. Ha ugyanis p eleget tesz e (4) egyenlőtlenségnek, akkor kielégíti (3)-at is. Ebből viszont következik, hogy van olyan x, amelyik kielégíti a (2) egyenlőtlenséget. Egy ilyen x és az $y=p-x$ számpár viszont eleget tesz az (1) egyenlőtlenségnek is.

A feladat feltételeit tehát a (4) egyenlőtlenséget kielégítő p számok és csak ezek teljesítik.

II. megoldás. Az (1) egyenlőtlenséget a $z=2y$ helyettesítéssel

(5) $$(x-2)^2+(z+2)^2\le 4$$

alakra hozhatjuk. Az (5) egyenlőtlenséget kielégítő $(x;\ z)$ koordinátájú pontok a síkon a $(2;\ -2)$ középpontú 2 sugarú körvonalon és a kör belsejében vannak.



Azok az $(x;\ z)$ koordinátájú pontok, amelyek a $p = x + y$ egyenlőségnek megfelelő $p = x + z/2$ egyenlőséget kielégítik, a síkon a

$$z = -2x + 2p \tag{6}$$

egyenesen vannak.

A feladatot ennek alapján úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg mindazokat a p értékeket, amelyekre a (6) egyenletű egyenesnek az (5) egyenlőtlenséggel jellemzett körlemezzel van közös pontja.

A (6) egyenletű egyenesek párhuzamosak. Keressük ki ezek közül a kör két érintőjét – ezeknek még van közös pontjuk a körlemezzel –, a feladat megoldását a két párhuzamos érintőhöz tartozó p értékek közötti p számok adják.

Az

$$(x-2)^2 + (z+2)^2 \le 4$$

kör -2 meredekségű érintői egyszerű számolással meghatározhatók, az ezekhez tartozó p értékek: $p_1 = 1 - \sqrt{5}$ és $p_2 = 1 + \sqrt{5}$. A feladat megoldását tehát az

$$1 - \sqrt{5} \le p \le 1 + \sqrt{5}$$

egyenlőtlenséget kielégítő p számok adják.

Balázs Iván József (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)