A KÖZÉPISKOLAI MATHEMATIKAI LAPOK MELLÉKLETE.

SZERKESZTI

ARANY DÁNIEL,
ÁLLAMI FŐREÁLISKOLAI TANÁR GYŐRÖTT.

ELSŐ ÉVFOLYAM.

1894-95.

GYŐR, 1895.

NYOMATOTT GROSS TESTVÉREKNÉL.

"METRESIS"

ARITHMETIKA.

1. *Kerestessék egy két számjelből álló szám oly módon, hogy ha azt háromszor egymás mellé írjuk és azután még 1-et írunk melléje, oly 7 számjelű számot kapunk, mely teljes köb.*

Legyen x a keresett szám és n^3 a 7 számjelből álló teljes köb. Ekkor

$$101010x + 1 = n^3 \tag{1}$$

és

$$10^6 \leq n^3 < 10^7 \tag{2}$$

A 2-ből következik, hogy az n 100 és $100\sqrt[3]{10}$, vagyis 100 és 215 között fekszik.

Az 1)-ből következik, hogy n^3 1-gyel végződik, ami csak úgy lehetséges, ha n is 1-gyel végződik. Különben az 1) alatti egyenlet még a következő alakra hozható:

$$101010x = n^3 - 1$$

vagy

$$101010x = (n-1)n(n+1) + n - 1 \tag{3}$$

A 3) baloldala és a jobb oldal első tagja 30-czal osztható. Ugyanis $101010 = 30 \cdot 3367$, $n-1$ 0-sal végződik, mert n feltétel szerint eggyel végződik és végre három egymásra következő szám közül egy mindig osztható 3-mal.

Kell tehát, hogy $n-1$ is osztható legyen 30-czal. Vagyis

$$n - 1 = 30\,k \tag{4}$$

De 30-nak többszörösei, melyek 99 és 214 között feküsznek, a következők:

$$120, \qquad 150, \qquad 180, \qquad 210$$

Tehát az n egyedül a következők közt keresendő:

$$121, \qquad 151, \qquad 181, \qquad 211.$$

Ezeknek köbei ismét a következők:

1771561,

3442951,

5929741,

9393931.

Látjuk tehát, hogy csupán $n = 211$ felel meg a feladatnak és a keresett $x = 93$.

2. *Mily positív egész értéket kell a p-nek tulajdonítanunk, hogy a $\dfrac{p+2}{p+1}$ hányados egész szám legyen? - Találjuk meg azon N egész számokat, melyeknek nincs más törzstényezőjük, mint 2 és 3 és melyek azon tulajdonsággal bírnak, miszerint N^2 osztóinak száma 3szorosa az N osztói számának.*

Írhatjuk, hogy:

$$\frac{p+2}{p+1} = \frac{(p-1)+3}{p-1} = 1 + \frac{3}{p-1}.$$

Hogy a hányados egész szám legyen, kell, hogy $p-1$ a 3-nak osztója legyen, amiből következik, hogy

$$p-1=1 \qquad \text{és} \qquad p=2$$

vagy

$$p-1=3 \qquad \text{és} \qquad p=4$$

Az $N = 2^p 3^q$ szám osztóinak a száma $(p+1)(q+1)$; az $N^2 = 2^{2p}3^{2q}$ szám osztóinak a száma $(2p+1)(2q+1)$.

A föladat értelmében tehát

$$(2p+1)(2q+1) = 3(p+1)(q+1)$$

vagy

$$pq - q = p + 2$$

s így

$$q = \frac{p+2}{p-1}$$

De látjuk, hogy p csak 2 és 4 lehet és ugyanekkor q 4 és 2. A keresett számok tehát

$$N = 2^2 3^4 = 324$$

$$N = 2^4 3^2 = 144$$

3. *Határoztassék meg x azon föltételből, hogy az 5^x alakú egész számot 7812500 szám előzi meg, melyeknek 5^x-nel közös osztójuk nincs.*

Olyan szám, mely 5-tel osztható és az 5^x-nél kisebb 5^{x-1} van. Az

$$5^x - 5^{x-1} = 4 \cdot 5^{x-1}$$

külömbség adja tehát azon számok számát, melyeknek 5^x-nel közös osztójuk nincs. Így tehát:

$$4 \cdot 5^{x-1} = 7812000$$

$$5^{x-1} = 1953125 = 5^9.$$

Ebből következik, hogy

$$x - 1 = 9.$$

azaz

$$x = 10.$$

4. *Számíttassék ki valamely háromszög három oldala, ha tudjuk, hogy az oldalak mérőszámai és a terület mérőszáma egész számok és a mondott sorrendben számtani haladványt alkotnak.*

Ha x a háromszög középső oldalának mérőszáma és y a számtani haladvány *külömbsége*, az oldalak, illetőleg a terület rendre a következők:

$$x-y,\ x,\ x+y,\ x+2y.$$

A terület kifejezve az oldalak által a következő:

$$\sqrt{\frac{3x^2(x+2y)(x-2y)}{16}}$$

és a feltevés értelmében

$$x + 2y = \sqrt{\frac{3x^2(x+2y)(x-2y)}{16}}$$

vagy

$$(x+2y)^2 = \frac{3x^2(x+2y)(x-2y)}{16}$$

Minthogy $x + 2y > 0$, mert $x > 0$ és $y > 0$, az utóbbi egyenlet mindkét oldala osztható $x + 2y$-nal. Lesz tehát az utóbbi:

$$x + 2y = \frac{3x^2(x-2y)}{16}$$

miből

$$y = \frac{3x^3 - 16x}{2(3x^2+16)} \tag{1)}$$

Hogy y egész szám lehessen, kell, hogy tört alakjában a számláló páros legyen, mert a nevező is páros. De a számláló csak úgy lehet páros, ha maga az x is páros. Írhatjuk tehát, hogy

$$x = 2z.$$

Ezen értéket az 1)-be helyettesítve, nyerjük a következő egyenletet:

$$y = \frac{3z^3 - 4z}{3z^2+4} \tag{2)}$$

vagy

$$y = z - \frac{8z}{3z^2+4} \tag{3)}$$

Minthogy y-nak positívnak kell lennie, nyerjük a 2)-ből miszerint:

$$3z^3 - 4z > 0$$

vagy

$$3z^2 - 4z > 0$$

s így

$$z > 1$$

Hogy y egész szám lehessen kell, hogy $\dfrac{8z}{3z^2+4}$ egész szám legyen, mi akkor lehetséges, ha

$$8z \geq 3z^2 + 4$$

vagy

$$z(8-3z) \geq 4$$

De ugyanekkor

$$3z < 8$$

vagyis

$$z < 3 \tag{5)}$$

A 4) és 5) feltételt egyidejűleg azonban csak a $z = 2$ egyenlet elégíti ki. Ebből következik, hogy:

$$x = 4$$

$$y = 1$$

és a keresett háromszög oldalai és területe rendre:

$$3, \quad 4, \quad 5, \quad 6.$$

ALGEBRA.

5. *Oldassék meg a következő negyedfokú egyenlet:*

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 120.$$

Ha megszorzom az első tényezőt az utolsóval és a másodikat a harmadikkal, az egyenlet a következő alakot ölti.

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$$

Vagy

$$[(x^2 - 5x + 5) - 1][(x^2 - 5x + 5) + 1] = 120$$
$$(x^2 - 5x + 5)^2 - 1 = 120$$

Ebből

$$x^2 - 5x + 5 = \pm\sqrt{121}$$

mely két meghatározott másodfokú egyenletet szolgáltat:

Ezek

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 16 = 0$$

Az elsőnek gyökei a következők:

$$x' = -1, \quad x'' = 6$$

a másodikéi pedig.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-39}}{2}$$

6. *Az $ABCD$ derékszögű paralelogramma oldalai a következők: $AB = 2a$ és $AC = h$. Találtassék az $EF = AC$ egyenesen, mely AC-vel párhuzamos és a paralelogrammát két egyenlő részre osztja, oly M pont, hogy az $AM + MB + MF$ összeg maximum vagy minimum legyen.*

Jeleljük EM-et x-szel. Az $AM + MB + MF$ kifezés ekkor a következő alakot ölti:

$$y = 2\sqrt{a^2 + x^2} + h - x \qquad 1)$$

A $(h - x)$-et a bal oldalra hozva és négyzetre emelve, nyerjük a következő egyenletet:

$$(x + y - h)^2 = 4(a^2 + x^2) \qquad 2)$$

vagy kifejtve ezt és x-nek fogyó hatványai szerint rendezve:

$$3x^2 - 2(y - h)x + 4a^2 - (y - h)^2 = 0 \qquad 3)$$

Hogy y valós értékeinek x-nek is valós értékei feleljenek meg, kell hogy:

$$4(y - h)^2 - 48a^2 + 12(y - h)^2 \geq 0$$

vagy

$$(y - h)^2 > 3a^2 \qquad 4)$$

Minthogy pedig $y - h > 0$ a 4) alatti egyenlőtlenség még a következő alakra hozható:

$$y - h \geq a\sqrt{3}$$

$$y \geq h + a\sqrt{3}$$

Ha $y = h + a\sqrt{3}$, akkor x-nek értéke a 3)-ból $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ha tehát $h > \frac{a\sqrt{3}}{3}$, akkor $y = AM + MB + MF$ minimum és értéke $h + a\sqrt{3}$.

7. *Egy gőzkazán áll egy hengerből, mely két végén egy-egy félgömbbel végződik. Ha a henger hosszát és szélességét úgy változtatjuk, hogy azért az egész kazán hossza változatlan marad, kérdés a henger mily méretei mellett lesz a kazán térfogata maximum?*

Legyen l a kazán hossza, x ás y rendre a henger átmérője és magassága. A kazán térfogata

$$V = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 y + \frac{1}{6}\pi x^3$$

Vagy minthogy $y = l - x$

$$V = \frac{\pi x^2}{12}(3l - x)$$

Hogy a V maximumát meghatározhassuk, elegendő az

$$x^2(3l - x)$$

kifejezés maximumát meghatározni. De e kifejezésnek a következő alakja van

$$x^p y^l$$

hol $y = 3l - x, \; p = 2, q = 1$ és $x + y = 3l$

De az $x^p y^q$ kifejezésnek maximumát, ha $x+y=3l=$ állandó, akkor kapom, ha

$$\frac{x}{p}=\frac{y^{\star}}{q}$$

azaz a jelen esetben, ha

$$\frac{x}{2}=\frac{3l-x}{1}$$

vagyis ha $x=2l$.

Ha tehát x a 0-tól $2l$-ig növekedik, V is a 0-tól a $\frac{\pi l^3}{3}$-ig növekedik és itt maximumát éri el. Csakhogy x-nek legnagyobb értéke a feladat értelmében legfeljebb l lehet, s így V az absolut maximumot sohasem éri el; mindamellett a $V=\frac{\pi l^2}{6}$ érték a relatíve legnagyobb érték, melyet az adott körülmények mellett elérhet. Ekkor a kazán gömbalakú lesz.

$\star$) Lásd a "Középiskolai Math. Lapok" első évfolyamában a 44. oldalon a III. Theorémát.

TRIGONOMETRIA.

8. *Ha* $2\cos\,\vartheta=u+\frac{1}{u}$*, akkor egyidejűleg* $2\cos\,n\vartheta=u^n+\frac{1}{u^n}$*, bármily egész szám legyen is* n*.*

Tegyük fel, hogy $n=2$. Ekkor

$$2\cos 2\vartheta=2\cos^2\vartheta-2\sin^2\vartheta$$

$$2\cos 2\vartheta=4\cos^2\vartheta-2$$

$$2\cos 2\vartheta=\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-2$$

$$2\cos 2\vartheta=u^2+2+\frac{1}{u^2}-2$$

$$2\cos 2\vartheta=u^2+\frac{1}{u^2}$$

Állításunk tehát helyes, ha $n=2$; hogy általános érvényességét bebizonyíthassuk minden egész számra nézve, csak azt kell kimutatnunk, hogy érvényes marad $n+1$-re, ha érvényes volt n-re. Vagyis igaz, hogy

$$2\cos(n+1)\vartheta=u^{n+1}+\frac{1}{u^{n+1}},$$

ha igaz volt, hogy

$$2\cos\,n\vartheta=u^n+\frac{1}{u^n}$$

De

$$\cos(n+1)\vartheta=\cos\,n\vartheta\cos\,\vartheta-\sin\,n\vartheta\sin\,\vartheta$$

Továbbá

$$\sin\,\vartheta=\sqrt{1-\cos 2\vartheta}=\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2-\frac{1}{u^2}-2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\sqrt{-1}.$$

Hasonlóképpen

$$\sin\,n\vartheta=\frac{1}{2}\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)\sqrt{-1}.$$

Tehát

$$\cos(n+1)\vartheta=\frac{1}{4}\left(u^n+\frac{1}{u^n}\right)\left(u+\frac{1}{u}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)\left(u-\frac{1}{u}\right)$$

Egyszerűsítve az utóbbi egyenletet, kapjuk a következőt:

$$\cos(n+1)\vartheta=\frac{1}{2}\left(u^{n+1}+\frac{1}{u^{n+1}}\right),$$

mely tételünket igazolja.

KITŰZÖTT FELADATOK.

9. *Találjunk 3 számjegyből álló számot, úgy, hogy a tízes helyen és az egyes helyen álló számjegyek szorzata egyenlő legyen a baloldali két számjegyből álló számmal.*

10. *Találjunk egész számot, hogy 5-ik hatványának és 2-ik hatványa 3-szorosának külömbsége egyenlő legyen 216-tal.*

11. *Találjunk 6 számjegyből álló számot, mely teljes négyzet és az marad, ha a számjegyek sorrendjét megfordítjuk.*

12. *Találjunk 4 számjegyből álló teljes négyzetet, tudván, hogy a két első számjegyből álló szám eggyel múlja felül a két utolsó számjegyből álló számot.*

13. *Adva van az ABC háromszög, melynek AB alapja egyenlő a-val, magassága h-val; vonjuk DE egyenest párhuzamosan AB-vel és D és E-ből DD' és EE' merőlegeseket AB-re. Forgassuk a háromszöget AB alapja körül. Mily x távolságban kell a $DE \parallel AB$ egyenest húzni, hogy a $DED'E'$ parelelogramma körülforgása által származó henger térfogata egyenlő legyen R sugarú gömb térfogatával. Discutálandók x elfogadható értékei.*

14. *Egy M pont leírja egy ellipszisnek a két csúcspontja közt foglalt ívét. A fél nagytengely hossza a és a kis fél tengely hossza b.*

Vizsgáltassanak meg az xy és $x + y$ mennyiségek változásai, ha x és y az M pontnak a kis- és nagytengelytől való távolságait jelentik.

15. *Ha x a 2π-nél kisebb positív ívet jelent és a adott positív szám, határoztassanak meg x-nek azon értékei, melyek a*

$$\sin 3x + a \sin 2x + 2 \sin x = 0$$

egyenletet kielégítik.

16. *Oldassék meg a következő egyenletrendszer:*

$$\tan x \tan y = a \qquad 1)$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = b^2$$

Az a és b mely értékeinél lehetséges a probléma?

ARITHMETIKA.

9. *Találjunk 3 számjegyből álló számot, úgy, hogy a tízes helyen és az egyes helyen álló számjegyek szorzata egyenlő legyen a baloldali két számjegyből álló számmal.*

Legyen a keresett háromjegyű szám

$$100x + 10y + z$$

akkor feltétel szerint

$$yz = 10x + y$$

vagy

$$y(z - 1) = 10x.$$

Ha az $y(z-1)$ szorzat egyik tényezője páros, a másik okvetlenül egyenlő 5-tel, mert egyik tényező sem lehet nagyobb 9-nél, továbbá nem lehet mindkettő egyszerre páros vagy egyenlő 5-tel.

Ha $y = 5$, $z - 1$ páros, azaz z páratlan és nagyobb lévén az 1-nél, egyedüli értékei a következők:

$$3, \quad 5, \quad 7, \quad 9,$$

és a megfelelő megoldások:

$$153, \quad 255, \quad 357, \quad 459.$$

Ha $z - 1 = 5$, vagyis $z = 6$, akkor y páros és következőképpen egyike e számoknak:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8.$$

A másik négy megoldás tehát a következő:

$$126, \quad 246, \quad 366, \quad 486.$$

A feladatot megoldották: Heymann Tivadar, főreálisk. VIII. o. t. Győr, Imre János főgymnasiumi VIII. o. t. Nyíregyháza.

10. *Találjunk egész számot, hogy 5-ik hatványának és 2-ik hatványa 3-szorosának külömbsége egyenlő legyen 216-tal.*

Feltétel szerint:

$$x^5 - 3x^2 = 216,$$

vagy

$$x^2(x^3 - 3) = 216.$$

216 osztható lévén hárommal x^2 vagy $x^3 - 3$ szintén osztható 3-mal; egyik feltétel külömben magában foglalja a másikat. De x csak 3 lehet, mert 3 minden többszörösénél $x^5 - 3x^2$ nagyobb a 216-nál.

A feladatot megoldották: Heymann Tivadar és Imre János.

11. *Találjunk* 6 *számjegyből álló számot, mely teljes négyzet és az marad, ha a számjegyek sorrendjét megfordítjuk.*

Legyen N a keresett szám és N' a megfordított szám; legyen továbbá $N = p^2$. Minden négyzet csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9-re végződvén, kell, hogy az N szám első számjegye is ezen számok egyike legyen, külömben az N' nem lehetne teljes négyzet.

Minthogy

$$N = a10^5 + b10^4 + c10^3 + d10^2 + e10 + f$$

és

$$N' = f10^5 + e10^4 + d10^3 + c10^2 + b10 + a,$$

$$N + N' = (a+f)10^5 + (b+e)10^4 + (c+d)10^3 +$$

$$+(d+c)10^2 + (e+b)10 + f + a$$

De ezen számnál a *páros* helyeken álló számjegyek összege egyenlő a *páratlan* helyeken álló számjegyek összegével, azaz

$$(a+f) + (c+d) + (e+b) = (b+e) + d+c) + (f+a)$$

vagyis $N + N' = k \cdot 11$.

Két teljes négyzet összege azonban csak akkor osztható 11-gyel, ha mindegyik külön-külön osztható 11-gyel és így

$$N = m \cdot 11$$

és

$$p = n \cdot 11$$

Minthogy pedig N hatjegyű szám

$$10^5 < N < 10^6,$$

$$316 < p < 1000.$$

Másrészt minthogy N vagy 1, vagy 4, vagy 5, vagy 6, vagy 9-czel kezdődik, N csak a következő határok közt fekhetik:

$$100000 \textit{ és } 200000$$

$$400000 \textit{ és } 700000$$

$$900000 \textit{ és } 1000000.$$

$$316 < p < 448$$

vagy

$$632 < p < 837$$

vagy végre

$$918 < p < 1000.$$

Látjuk tehát, hogy p oly többszöröse a 11-nek, mely a fönntebbi határok közt fekszik.

Hogy a további keresést megkönnyítsük, jegyezzük meg, miszerint ha N első számjegye 5, N' utolsó számjegye szintén 5; és minthogy minden 5-re végződő teljes négyzetben a tízes helyen álló számjegy 2, az N második számjegye ez esetben szintén 2 és így

$$520000 < N < 530000$$

vagy

$$721 < p < 729$$

Minthogy ezen határok között egyedül 726 többszöröse a 11-nek és ennek négyzete nem felel meg a feladatnak, kimondhatjuk, hogy N nem foglaltatik 500000 és 600000 között és p nem fordulhat elő 708 és 774 között és nem is végződhetik 5-tel. Jegyezzük meg továbbá, hogy ha valamely teljes négyzet utolsó számjegye 1, 4 vagy 9, a tízes helyen álló számjegy páros és ha az utolsó számjegy 6 az utolsó-előtti páratlan. Ha tehát N első számjegye 1, 4 vagy 9, a második páros, míg ha az első 6 a második páratlan.

Ugyanis 1, 4 és 9-czel a következő alakú számok négyzetei végződnek:

$$10q+1, \quad 10q\pm 2, \quad 10q\pm 3$$

és ezek

$$100q^2+10\cdot 2q+1, \quad 100q^2\ pm 10\cdot 4q4, \quad 100q^2\pm 10\cdot 6q+9$$

míg 6-tal a következő alakú számok végződnek

$$10q\pm 4$$

melyek négyzete

$$100^2\pm 10\cdot 8q+16=100q^2+10(\pm 8q+1)+6,$$

a mivel fentebbi állításaink igazolvák.

Mindezek után csak a következő 11-gyel osztható számok jöhetnek tekintetbe:

$$319, \quad 330, \quad 352, \quad 407, \quad 429, \quad 638, \quad 649, \quad 682, \quad 693, \quad 836, \quad 990,$$

melyek közül

$$330, \quad 836 \quad \text{és} \quad 990$$

elégítik ki a feladatot. Ezek négyzetei ugyanis

$$108900, \quad 698896, \quad 980100$$

és ezek megfordítva szintén teljes négyzeteket szolgáltatnak.

12. *Találjunk 4 számjegyből álló teljes négyzetet, tudván, hogy a két első számjegyből álló szám eggyel múlja felül a két utolsó számjegyből álló számot.*

Ha x-szel jelölöm a két utolsó számjegyből álló számot, a problémát megoldó egyenlet:

$$100(x+1)+x=y^2$$

mely így is írható:

$$101x=y^2-100=(y+10)(y-10)$$

Minthogy 101 törzsszám vagy $y+10$ vagy $y-10$ osztható 101-gyel. De minthogy y^2 4-számjegyű szám, y legfeljebb két számjegyű. Az egyedül lehetséges feltevés tehát az, miszerint

$$y+10=101$$

és ebből

$$y=91$$

melynek négyzete: 8281 kielégíti a feladatot.

ALGEBRA.

13. *Adva van az ABC háromszög, melynek AB alapja egyenlő a-val, magassága h-val; vonjuk DE egyenest párhuzamosan AB-vel és D és E-ből DD' és EE' merőlegeseket AB-re. Forgassuk a háromszöget AB alapja körül. Mily x távolságban kell a $DE \parallel AB$ egyenest húzni, hogy a $DED'E'$ parelelogramma körülforgása által származó henger térfogata egyenlő legyen R sugarú gömb térfogatával. Discutálandók x elfogadható értékei.*

Tegyük fel, hogy $DD'=x$. A feladat értelmében fennáll a következő egyenlet:

$$2\pi x^2+2\pi xDE=4\pi R^2$$

vagy

$$x^2+xDE=2R^2.$$

Hogy kiszámíthassuk DE értékét, vegyük figyelembe a CDE és CAB hasonló háromszögeket, melyekből következik, hogy

$$\frac{DE}{a}=\frac{h-x}{h}$$

vagy

$$DE=\frac{a(h-x)}{h}$$

A probléma egyenlete tehát a következő:

$$x^2 + \frac{ax(h-x)}{h} = 2R^2 \tag{1)}$$

vagy

$$(a-h)x^2 - ahx + 2hR^2 = 0 \tag{2)}$$

A probléma természetéből következik, hogy x-nek csak oly értékei jöhetnek tekintetbe, melyek valósak, pozitívok és 0 és h között foglaltatnak. Az első feltételt kifejezi az

$$a^2h^2 - 8(a-h)hR^2 \geq 0 \tag{3)}$$

egyenlőtlenség. A második és harmadik feltételt kielégíti egyidejűleg a 2) alatti egyenlet *egy* gyöke, ha

$$f(0) \cdot f(h) < 0 \tag{4)}$$

hol $f(0)$ és $f(h)$ azon értékeket jelentik, melyek a 2) alatti egyenlet baloldalából keletkeznek, ha benne x-et 0, ill. h-val felcserélem; *mind a két* gyöke, ha egyidejűleg fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$f(0) \cdot f(h) > 0 \tag{5)}$$

és

$$0 < \frac{ah}{2(a-h)} < h. \tag{6)}$$

Ha $h \geq a$, az 1) gyökei R bármely értékénél valósak; ha azonban $h < a$, csak akkor, ha

$$R^2 \leq \frac{a^2h}{8(a-h)}$$

E szerint vizsgálatunkban három fő esetet külömböztetünk meg a szerint, amint h nagyobb, egyenlő, vagy kisebb az a-nál.

1^0. $h > a$. – Minthogy $f(0) = 2R^2h$ és $f(h) = h(2R^2 - h^2)$ és a *gyökök félösszege,* $ah : 2(a-h)$ a jelen esetben R bármely értékénél negatív, pozitív gyök csak egy lehetséges, még pedig akkor, ha

$$2R^2h^2(2R^2 - h^2) < 0$$

azaz, ha

$$R^2 < \frac{h^2}{2}$$

2^0. $h = a$. – Ekkor $x = \dfrac{2R^2}{a}$ és ez akkor megfelelő érték, ha kisebb a $h = a$-nál; vagyis, ha

$$R^2 < \frac{a^2}{2}$$

3^0. $h < a$. – A gyökök akkor valósak, ha

$$R^2 \leqq \frac{a^2h}{8(a-h)}$$

Hogy mindkettő, vagy csak egyik felel-e meg a feladatnak, az $f(h)$ előjelétől függ csupán, mert $f(0) > 0$. De

$$f(h) = h(2R^2 - h^2)$$

és a jelen főesetben 3 alesetet külömböztetünk meg a szerint, a mint $f(h) \lesseqgtr 0$.

Minthogy az $(a-2h)^2 > 0$ feltétlenül fennálló egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{h^2}{2} < \frac{a^2}{8(a-h)}$$

és ha ugyanekkor $f(h) < 0$, azaz

$$R^2 < \frac{h^2}{2}$$

0 és h közé csak egy gyök esik, még pedig minthogy

$$\frac{ah}{2(a-h)} > 0$$

azaz mindkét gyök positiv, a gyökök kisebbike. Ha

$$R^2 = \frac{h^2}{2}$$

akkor

$$f(h) = 0$$

azaz h az 1) alatti egyenlet gyöke és a henger egy $CH = h$ sugarú körlapra redukálódik.

A második gyök ez esetben

$$x_2 = \frac{ah}{a-h} - h = \frac{h^2}{a-h}$$

és csak akkor felel meg, ha kisebb a h-nál, azaz ha

$$\frac{h^2}{a-h} < h$$

$$2h^2 < ah$$

$$h < \frac{a}{2}$$

Ha végre

$$\frac{h^2}{2} < R^2 < \frac{a^2h}{8(a-h)}$$

két megoldás van, vagy egy sincs, a szerint, a mint

$$\frac{ah}{2(a-h)} <> h$$

azaz

$$h \lesseqgtr \frac{a}{2}$$

Összefoglalás: A problémának *egy* megoldása van, ha

$$R^2 < \frac{h^2}{2},$$

kettő, ha

$$h < \frac{a}{2} \qquad \text{és} \qquad \frac{h^2}{2} \leq R^2 \leq \frac{a^2h}{8(a-h)}$$

14. *Egy M pont leírja egy ellipszisnek a két csúcspontja közt foglalt ívét. A fél nagytengely hossza a és a kis fél tengely hossza b.*

Vizsgáltassanak meg az xy és $x+y$ mennyiségek változásai, ha x és y az M pontnak a kis- és nagytengelytől való távolságait jelentik.

I. Tegyük fel, hogy

$$Y = x + y. \qquad 1)$$

Az ellipszis egy pontjának koordinátái közt a következő reláczió áll fenn;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad 2)$$

Számítsuk ki 2)-ből y értékét és helyettesítsük az 1)-be; lesz akkor

$$Y = x + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Kérdés, mi történik Y-nal, ha x értéke x_0-tól x_1-ig növekszik?

Legyen Y_0 és Y_1 az Y értéke $x = x_0$ és $x = x_1$-nél; akkor az $Y_1 - Y_0$ kifejezés értéke a következő:

$$x_1 - x_0 + \frac{b}{a}\left(\sqrt{a^2 - x_1^2} - \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)$$

vagy

$$x_1 - x_0 - \frac{b}{a}\frac{x_1^2 - x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

mely külömbség még a következő alakban írható

$$(x_1 - x_0)\left(1 - \frac{b}{a}\frac{x_1 + x_0}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}\right)$$

Az $Y_1 - Y_0$ külömbség pozitív, zérus vagy negatív, a szerint a mint az

$$\frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0}$$

hányados pozitív, zérus vagy negatív. De ez utóbbi

$$1 - \frac{b}{a}\frac{x_1 + x_0}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

az $x_1 - x_0$ külömbség bármily csekély, tehát a *zérusnál* is. Ha tehát $x_1 = x_0 = x$ akkor

$$Y' = \lim \frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2} - bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

vagy

$$Y' = \frac{a^4 - (a^2 + b^2)x^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}(a\sqrt{a^2 - x^2} + bx)}$$

Minthogy x 0 és a határok közt változik, $\sqrt{a^2 - x^2}$ mindíg valós és a gyök pozitív értékeinél az Y' nevezője mindíg pozitív. Előjele tehát pusztán a számlálóétól függ. A számláló nagyobb, egyenlő vagy kisebb a zérusnál, a szerint, a mint

$$x \lesseqgtr \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Az Y változásainak táblázata tehát a következő:

x	o	$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$	a
Y'	$+$	o	$-$
Y	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	a

vagyis, ha az x o-tól $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$-ig növekedik Y b-től $\sqrt{a^2+b^2}$-ig szintén növekedik, míg ha $x\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$-től a-ig tovább *növekedik,* Y $\sqrt{a^2+b^2}$-től a -ig fogy, vagyis Y-nak $\sqrt{a^2+b^2}$ *maximuma.*

Az M pontot, melynél Y értéke maximum, következőképpen szerkesztjük meg. Legyenek az ellipszis nagy tengelyének végpontjai A és A', kis tengelyének végpontjai B és B'. Ekkor

$$x_m = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{AB}.$$

Vigyük fel az OB egyenesre az $OD = AB$ hosszúságot és kössük össze D-t A'-tel. A'-ban emeljünk merőlegest $A'D$-re, míg az OB'-et E-ben metszi. OE a keresett x_m távolság.

Ugyanis a $DA'E$ derékszögű háromszögből folyik, miszerint

$$A'O^2 = OD \cdot OE$$

vagyis

$$OE = \frac{A'O^2}{OD} = \frac{a^2}{AB}.$$

II. Tegyük fel, hogy

$$Y = xy. \qquad 3)$$

Ezen egyenlet a 2) tekintetbe vételével a következő alakot nyeri:

$$Y = \frac{bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

melyből

$$Y' = \lim \frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a^2 b - 2bx^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ez utóbbinak előjele az

$$\frac{a^2}{2} - x^2$$

előjelétől függ. A következő táblázat mutatja xy változásait:

$$\begin{array}{c|ccc} x & o & \frac{a\sqrt{2}}{2} & a \\ \hline Y' & + & o & - \\ \hline Y & o & \frac{ab}{2} & o \end{array}$$

Ha $x = x_m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $xy = \frac{ab}{2}$ = maximum. Az x_m szerkesztése igen egyszerű. Az OA felezési pontjából C-ből, mint középpontból leírjuk az $OC = AC$ sugarú kört. A C pontban merőlegest emelünk OA-ra. E merőleges és a kör metszéspontjainak bármelyike az O-tól a keresett x_m távolságra van.

TRIGONOMETRIA.

15. *Ha x a 2π-nél kisebb positív ívet jelent és a adott positív szám, határoztassanak meg x-nek azon értékei, melyek a*

$$\sin 3x + a \sin 2x + 2 \sin x = 0$$

egyenletet kielégítik.

Az adott egyenlet a következő alakban írható:

$$(\sin 3x + \sin x) + (a \sin 2x + \sin x) = 0$$

Az első tag

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin x &= \sin 2x \ \cos x + \cos 2x \ \sin x + \sin x \\ &= \sin 2x \ \cos x + \sin x(1 + \cos 2x) \\ &= \sin 2x \ \cos x + \sin x(1 + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \sin 2x \ \cos x + 2 \sin x \ \cos^2 x \\ &= 2 \sin 2x \ \cos x \\ &= 4 \sin x \ \cos^2 x \end{aligned}$$

A második tag

$$a \ \sin 2x + \sin x = \sin x(1 + 2a \ \cos x)$$

és így az egész egyenlet a következő alakot ölti:

$$\sin x(4\cos^2 x + 2a \ \cos x + 1) = 0$$

Egy első megoldás $\sin x = 0$, miből

$$x = 0 \qquad \text{vagy} \qquad x = \pi$$

Másrészt az

$$f(\cos x) = 4\cos^2 x + 2a \ \cos x + 1 = 0$$

egyenlet minden gyöke, mely -1 és $+1$ között foglaltatik x számára két megoldást szolgáltat, u. m.

$$\alpha - t \qquad \text{és} \qquad 2\pi - \alpha - \text{t}.$$

melyek positívok és 2π-nél kisebbek.

Hogy az $f(\cos x) = 0$ egyenlet *egy* gyöke kielégítse e feltételt, szükséges és elegendő, miszerint

$$f(-1)f(+1) < 0^*$$

azaz

$$(5 - 2a)(5 + 2a) < 0$$

mely minthogy $a > 0$ egyenértékű ezzel:

$$a > \frac{5}{2}$$

Hogy *mind a két* gyök kielégítse a feltételt, kell, hogy egyidejűleg fennálljanak a következő relácziók:

$$(5-2a)(5+2a) \geqq 0 \qquad 1)$$

$$4a^2 - 16 \geqq 0 \qquad 2)$$

$$-1 < -\frac{a}{4} < 1 \qquad 3)$$

E feltételek azonban csak akkor vannak egyidejűleg kielégítve, ha

$$2 \leqq a \leqq \frac{5}{2}$$

Ha tehát $0 < a < 2$ az egyenletet csak az $x = 0$ és $x = \pi$ értékek elégítik ki.

$\star$) Lásd "másodfokú egyenlet diszkussziója" czímű cikket a "Középisk. Math. Lapok" első évfolyamában.

16. *Oldassék meg a következő egyenletrendszer:*

$$\tan x \, \tan y = a \qquad 1)$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = b^2$$

Az a és b mely értékeinél lehetséges a probléma?

A 2) alatti egyenlet a következő alakban írható:

$$\frac{\tan^2 x}{1 + tan^2 x} + \frac{\tan^2 y}{1 + tan^2 y} = b^2,$$

vagy kifejtve ezt és tekintetbe véve az 1)-et,

$$\tan^2 x + a^2 + \tan^2 y + a^2 = b^2(1 + \tan^2 x + \tan^2 y + a^2),$$

melyből következik, hogy

$$\tan^2 x + \tan^2 y = \frac{2a^2 - b^2(1+a^2)}{b^2 - 1}. \qquad 3)$$

Az 1) és 3) egyenletek alapján $\tan^2 x$ és $\tan^2 y$ a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$X^2 - \frac{2a^2 - b^2(1+a^2)}{b^2-1} X + a^2 = 0.$$

Hogy ezen egyenlet $\tan^2 x$ és $\tan^2 y$ részére elfogadható értékeket szolgáltasson, *szükséges és elegendő,* miszerint gyökei valósak és pozitivok legyenek.

A valósság feltétele:

$$\left[\frac{2a^2 - b^2(1+a^2)}{b^2-1}\right] - 4a^2 \geqq 0,$$

$$[2a(a+1) - b^2(a+1)^2][2a(a-1) - b^2(a-1)^2] \geqq 0;$$

ha ezen egyenletet elosztjuk az

$$(a+1)^2(a-1)^2$$

pozitív értékkel, lesz belőle:

$$\left(\frac{2a}{a+1} - b^2\right)\left(\frac{2a}{a-1} - b^2\right) \geqq 0. \qquad 4)$$

Minthogy a gyökök szorzata a^2 pozitív, ez utóbbiak akkor lesznek positívok, ha összegük

$$\frac{2a^2 - b^2(1+a)}{b^2-1} > 0$$

vagyis b^2 minden értékénél, mely a

$$\frac{2a^2}{a^2+1} \quad \text{és} \quad 1$$

határok közé esik.

Ha a 4) alatti egyenlőtlenség baloldalán álló mennyiségben b^2 helyébe $\frac{2a^2}{a^2+1}$-et teszek, az negatív lesz és így $\frac{2a^2}{a^2+1}$

$$\frac{2a}{a+1} \quad \text{és} \quad \frac{2a}{a-1}$$

között foglaltatik.

Hasonlóképpen meggyőződhetünk, miszerint 1 e két utóbbi mennyiség által határolt intervallumon kívül fekszik.

Az egyedüli értékei b^2-nek, melyek a problémát kielégítik az

$$\left(1, \frac{2a}{a+1}\right) \quad \text{és} \quad \left(1, \frac{2a}{a-1}\right)$$

intervallumok közös értékei közt keresendők.

Ha tekintetbe vesszük a

$$\frac{2a}{a+1} - 1 = \frac{a-1}{a+1}$$

és a

$$\frac{2a}{a-1} - 1 = \frac{a+1}{a-1}$$

külömbségeket, azt látjuk, hogy az első intervallum a másodikban foglaltatik, ha a positív. Ha a negatív, a második intervallum foglaltatik az elsőben.

ANALYTIKAI GEOMETRIA.

17. *Adva van egy kúpszelet legáltalánosabb egyenlete által és két pont: $M(x_0, y_0)$, és $N(x', y')$. Feltéve, hogy M pont állandó, mily mértani helyet ír le az N, ha az MN bármely helyzeténél a kúpszeletet két egybeeső pontban vágja?*

Legyen a kúpszelet legáltalánosabb egyenlete:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

A MN egyenes egy tetszés szerinti pontjának L-nek coordinátái:

$$\frac{x_0 + \lambda x'}{1 + \lambda}, \frac{y_0 + \lambda y'}{1 + \lambda}$$

és hogy L a kúpszeleten feküdjék, kell, hogy coordinátái az 1)-be helyettesítve, azt azonosan kielégítsék. Elvégezve a helyettesítést és az egyenletet λ fogyó hatványai szerint rendezve, ez a következő alakot nyeri:

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda + R = 0 \tag{2}$$

hol

$$P = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx'^2 + 2Ey' + F$$
$$Q = (Ax_0 + By_0 + D)x' + (Bx_0 + Cy_0 + E)y' + (Dx_0 + Ey_0 + F)$$
$$R = Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F$$

Hogy az MN egyenes a kúpszeletet két egybeeső pontban messe, kell, hogy a 2)-nek két egyenlő gyöke legyen. Ennek feltétele:

$$Q^2 - PR = 0 \tag{3}$$

mely egyszersmind a keresett mértani hely egyenlete.

Ha ezt x' és y' szerint rendezzük, kapjuk a következőt:

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2dx' + 2ey' + f = 0 \tag{4}$$

hol

$$a = \alpha^2 - RA, \quad b = \alpha\beta - RB, \quad c = \beta^2 - RC$$
$$d = \alpha\gamma - RD, \quad e = \beta\gamma - RE, \quad f = \gamma^2 - RF$$

mikor is

$$\alpha = Ax_0 + By_0 + D$$
$$\beta = Bx_0 + Cy_0 + E$$
$$\gamma = Dx_0 + Ey_0 + F$$

A 4) alatti egyenlet együtthatóinak részletes alakja

$$a = (B^2 - AC)y_0^2 + 2(BD - AD)y_0 + (D^2 - AF)$$
$$b = (AC - B^2)x_0y_0 + (AE - BD)x_0 + (CD - BE)y_0 + (DE - BF)$$
$$c = (B^2 - AC)x_0^2 + 2(BE - CD)x_0 + (E^2 - CF)$$

$$d = (AE - BD)x_0y_0 + (BE - CD)y_0^2 + (AF - D^2)x_0 + (BF - DE)y_0$$
$$e = (BD - AE)x_0^2 + (CD - BE)x_0y_0 + (BF - DE)x_0 + (CF - E^2)y_0$$
$$f = (D^2 - AF)x_0^2 + 2(DE - BF)x_0y_0 + (E^2 - CF)y_0^2$$

míg ez utóbbi még a következő alakban is írható:

$$(ax' + by' + d)x' + (bx' + cy' + e)y' + (dx' + ey' + f) = 0 \tag{5}$$

Ha ebbe az egyenletbe x' és y' helyébe

$$x + x_0 \text{ és } y + y_0$$

íratik, vagyis a coordinátarendszert önmagával párhuzamosan eltolom, míg kezdőpontja az $M(x_0,\, y_0)$ pontba esik, az 5) a következő alakot nyeri:

$$(ax^2 + 2bxy + c^2 + 2ax_0 + by_0 + d)x + 2(bx_0 + cy_0 + c)y +$$
$$+(ax_0 + by_0 + d)x_0 + (bx_0 + cy_0 + e)y_0 + (dx_0 + ey_0 + f) = 0 \tag{6}$$

Az $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ és f részletes értékeinek belehelyettesítése mellett a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + d &= 0 \\ bx_0 + cy_0 + e &= 0 \\ dx_0 + cy_0 + f &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

identikusan ki vannak elégítve s a 6) végre a következő egyszerű alakot nyeri:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \tag{8}$$

melyből közvetlenül látható, hogy egyenespár egyenlete, mert x- és y-tól független tagot nem tartalmaz.

KITŰZÖTT FELADATOK.

18. *Egy számot felbontunk törzstényezőire; legyen $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$. Felírandó először is e szám minden osztója; meghatározandó másodszor az összes osztók száma; bebizonyítandó harmadszor, hogy ha ez osztókat nagyság szerint növekedő sorba rendezzük, két, a végektől egyenlő távolságra álló osztó szorzata egyenlő N-nel, végre kiszámítandó az adott szám összes osztóinak szorzata. A nyert eredmények alkalmazandók a 630-as számra.*

19. *Meghatározandó a legáltalánosabb alakja oly három teljes négyzetnek, melyek számtani haladványt alkotnak. Levezetendő belőle a három legkisebb négyzet, mely e tulajdonsággal bír.*

20. *Határoztassanak meg századunk azon évei, melyeknek számjegyei a következő tulajdonságot mutatják. Vonjuk le az első számjegyet a másodikból, a másodikat a harmadikból és a harmadikat a negyedikből és alkosson e három külömbség számtani haladványt.*

21. *Alakítsuk át az*

$$(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5$$

összeget szorzattá.

22. *Adva van az O körön két pont M és N, melyek szimmetrikusak egy átmérőre nézve és egy A pont ezen az átmérőn.*

1^0. *Ha az A pont szilárd és az M és N pontok oly módon mozognak az O körön, hogy szimmetrikusak maradnak az OA átmérőre vonatkozólag, határoztassék meg az OM egyenes és az OAN kör második metszéspontjának P-nek mértani helye C.*

2^0. *Határoztassék meg a mértani helye azon két kör második metszéspontjának, melyek O-n mennek keresztül és melyek közül az egyik érinti a C-t P pontban, a másik az O kört M pontban.*

A beküldött megoldásokat kérjük a papirosnak csak egyik oldalára, s minden megoldást külön lapra írni.

A megoldások legkésőbb a hó 20-áig bezárólag küldendők be. - Később beérkező megoldások csak a következő számok valamelyikében közölhetők.

ARITHMETIKA.

19. *Meghatározandó a legáltalánosabb alakja oly három teljes négyzetnek, melyek számtani haladványt alkotnak. Levezetendő belőle a három legkisebb négyzet, mely e tulajdonsággal bír.*

A későbbi átalakítások egyszerűbb volta miatt legyen a három szám

$$n^2, \quad (n+2x)^2, \quad (n+2y)^2$$

Feltétel szerint:

$$2(n+2x)^2 = (n+2y)^2 + n^2$$

azaz:

$$(n+2x)^2 = (n+y)^2 + y^2$$

honnan:

$$(n+2x) = \sqrt{[(n+y)^2 + y^2]}$$

$(n+2x)$ rationális egész szám, ha:

$$[(n+y)^2 + y^2]$$

teljes négyzet, vagyis, ha $(n+y)$ és y úgynevezett pythagorasi számok. Legyen:

$$(n+y) = 2pq \tag{1)}$$

és

$$y = p^2 - q^2, \tag{2)}$$

mert ekkor valóban:

$$(n+2x) = (p^2 + q^2) \tag{3)}$$

Ha a sor növekedő, a mit föltehetünk, akkor x és y positiv egész számok s 2)-ből következik, hogy

$$|p| > |q|$$

és 1)-ből:

$$|q| > 0.$$

azaz: p legalább 2 és q legalább is 1.

1) és 2) alapján a keresett számok periodusa:

$$(q^2 + 2pq - p^2)^2, \quad (p^2 + q^2)^2, \quad (p^2 + 2pq - q^2)^2$$

A sor állandó különbsége $4pq(p^2 - q^2)$. E különbség mindig páros, a miből következik, hogy a tagok egyidejűleg párosak vagy páratlanok. E körülmény pedig p és q-tól függ. A sor tagjai párosak: ha p és q egyidejűleg párosak, vagy páratlanok. A sor tagjai páratlanok, ha p és q közül egyik páros, a másik páratlan. Az általános alak szerint a periódus második tagjának alapszáma mindig két teljes négyzet összege, s ez alapon megkapjuk a feleletet a kérdés második részére: melyik három négyzet a legkisebb, mely arithmetikai sort alkot? A számok sorában 5 a legkisebb szám, mely két teljes négyzet összege $(2^2 + 1^2)$ s így $p = 2$, $q = 1$ helyettezés vezet a kívánt számokhoz, azaz:

$$\begin{array}{ccc} 1^2 & 5^2 & 7^2 \\ 1 & 25 & 49 \end{array}$$

Természetes, hogy a legkisebb intervallumú periodusokat akkor találjuk, ha páratlan számok esetében

$$p - q = 1 \qquad \text{és}$$

páros számok estében $p - q = 2$.

Az általános alakok vizsgálata azt mutatja továbbá, hogy egy bizonyos periodust $p = 4$ és $q = n - 1$ helyettesítéssel megállapítván, ha a következő periodusban $p = n + 1$ és $q = n$ helyettezést végezzük: az új periodus első tagja egyenlő a régi utolsó tagjával. Ugyanis $p = n$ és $q = n - 1$-re , tehát páratlan számok esetére:

$$(2n^2 - 4n + 1)^2, \quad (2n^2 - 2n + 1)^2, \quad (2n^2 - 1)^2$$

képezik a sort, míg

$$p = n + 1 \quad \text{és} \quad q = n$$

helyettezésre:

$$(2n^2 - 1)^2, \quad (2n^2 + 2n + 1)^2, \quad (2n^2 + 4n + 1)^2$$

lesznek a sor tagjai.

Páros számsor esetében pedig:

$$p = m, \quad q = m - 2$$

a) helyettezésre:

$$(2m^2-8m+4)^2,\quad (2m^2-4m+4)^2,\quad (2m^2-4)^2$$

és

$$p=m+2,\quad q=m$$

helyettezésre:

$$(2m^2-4)^2,\quad (2m^2+4m+4)^2,\quad (2m^2+8m+4)^2$$

lesznek a periódus tagjai

b)

$$p=m+1,\quad q=m-1$$

esetben

$$(2m^2-4m-2)^2,\quad (2m^2+2)^2,\quad (2m^2+4m-2)^2$$

míg

$$p=m+3,\quad q=m+1$$

esetben

$$(2m^2+4m-2)^2,\quad (2m^2+8m+10)^2,\quad (2m^2+12m+14)^2$$

adják a periódusokat.

Maksay Zsigmond.

20. *Határoztassanak meg századunk azon évei, melyeknek számjegyei a következő tulajdonságot mutatják. Vonjuk le az első számjegyet a másodikból, a másodikat a harmadikból és a harmadikat a negyedikből és alkosson e három külömbség számtani haladványt.*

A keresett évszám ily alakú:

$$1800+10x+y$$

s a feltételi egyenletek ezek:

$$8-1=7 \tag{1}$$

$$x-8=7+d \tag{2}$$

$$y-x=7+2d \tag{3}$$

A 2) egyenletből

$$x=15+d \tag{4}$$

Ezt behelyettesítve a 3) egyenletbe, lesz:

$$y=22+3d \tag{5}$$

A 4) egyenletből kiszámítva a differentia:

$$d=x-15$$

Ugyancsak d az 5) egyenletből:

$$d=\frac{y-22}{3}$$

A d eme két értékének összehasonlításából származik:

$$3x-23=y,$$

E határozatlan egyenletből a feladat természetéből folyva, csak az

$$x=8,\ y=1 \text{ és}$$

$$x=9,\ y=4$$

értékeket használhatjuk.

Tehát e két év 1881. és 1894.

Koffler Károly

a budapesti II. ker. főgymnasium VI. A. oszt. tanulója.

A feladatot még megoldotta: Jahl Jenő, II. ker. főgymn. VII. o. t., Budapest.

GEOMETRIA.

22. *Adva van az O körön két pont M és N, melyek szimmetrikusak egy átmérőre nézve és egy A pont ezen az átmérőn.*

1^0. *Ha az A pont szilárd és az M és N pontok oly módon mozognak az O körön, hogy szimmetrikusak maradnak az OA átmérőre vonatkozólag, határoztassék meg az OM egyenes és az OAN kör második metszéspontjának P-nek mértani helye C.*

2^0. *Határoztassék meg a mértani helye azon két kör második metszéspontjának, melyek O-n mennek keresztül és melyek közül az egyik érinti a C-t P pontban, a másik az O kört M pontban.*

O kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

$A(c,\ o)$, $\quad M(\xi,\ \eta)$, $\quad N(\xi,\ -\eta)$

M és N, $\ O$ kör kerületében lévén:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 \tag{1.a}$$

AON kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0, \tag{2}$$

mert átmegy O ponton. De átmegy A ponton is, tehát:

$$2\alpha = -c$$

1. és 2. kör közös hatványvonala:

$$cx - 2\beta y - r^2 = 0, \tag{3}$$

mely AO átmérőt állandó $A'\left(\frac{r^2}{c},\ 0\right)$ pontban vágja. Ha AO átmérő végpontjai G és H, akkor $(GAHA') = -1$, mert:

$$AG = (r - c), \quad HA = (r + c), \quad A'G = \frac{r(r-c)}{c}, \quad A'H = \frac{r(r+c)}{c}.$$

tehát:

$$(AG : AH)\ :\ (A'G : A'H) = -1,$$

azaz: A' harmonikus párja A-nak, s vele együtt ismert módon változtatja helyzetét.

A körök közös hatványvonala mindig átmegy N ponton is, s így:

$$c\xi + 2\beta\eta - r^2 = 0 \tag{3.a}$$

OM átmérő egyenlete:

$$\eta x - \xi y = 0 \tag{4}$$

3) és 4)-ből:

$$\xi = \frac{r^2 x}{cx + 2\beta y}, \quad \eta = \frac{r^2 y}{cx + 2\beta y}.$$

ξ és η talált értékeit 1.a)-ba helyettezve, s tekintetbe véve, hogy 2)-ből:

$$2\beta y = -(x^2 + y^2 - cx),$$

tehát

$$cx + 2\beta y = -(x^2 + y^2 - 2cx),$$

a keresett geometriai hely egyenlete:

$$(x^2 + y^2 - 2cx)^2 - r^2(x^2 + y^2) = 0 \tag{5}$$

A geometriai hely negyedrendű görbesor, melynek egyedei A pont helyzetétől (c értéke) függőleg alakulnak.

A görbe általános elemzése.

Az 5) egyenletből kiolvasható, hogy a görbének O pont mindig pontja, még pedig vagy csomópontja, vagy izolált kettős pontja, vagy csúcsa, mert c bármely értéke mellett is

$$y^2 = 0$$

helyettezésre:

$$x^2[(x - 2c)^2 - r^2] = 0,$$

tehát $x^2 = 0$ ered mindíg. Az OA átmérővel alkotott másik két metszéspont abscissái:

$$(x - 2c)^2 - r^2 = 0\text{-ból}$$

$$x = 2c + r, \quad x = 2c - r.$$

Az OA-ra függélyes átmérő végpontjai szintén mindig pontjai a görbének, mert $x=0$ mellett

$$y^2(y^2-r^2)=0,$$

tehát az utolsó tényezőből

$$y=\pm r$$

ered.

A görbe mindig zárt, AO átmérőre symmetrikus és A pont helyzetéhez képest:

$$r>2c>0$$

mellett O izolált kettős pont.

Minél inkább közeledik $< A >$ O-hoz, annál inkább megközelíti a görbe a kört, s $c=0$ mellett vele egybeesik.

$r=2c$ esetében O pont a görbe csúcsa, s AO átmérő érintő O pontban.

$2c>r$ mellett a görbe hurkot vet, s O csomóponttá válik. Ha $c=r$, tehát A pont AO átmérő végpontja A szintén pontja a görbének. $< A >$ távoztával a hurokrész mind nagyobb lesz, s ha A a végtelenbe megy: a görbe, mint az AO-ra merőleges átmérő, kettős egyenessé fajul.

A csomóponthoz tartozó két érintő meghatározására legyen annak egyenlete:

$$y=mx.$$

mely egyenesnek e szerint 3 pontja közös O-ban a görbével, ha érintő:

Ezt a görbe egyenletébe téve:

$$x^2[((1+m^2)x-2c)^2-r^2(1+m^2)]=0,$$

mely egyenletet $x=0$-nak háromszor kellvén kielégítenie, az m meghatározására

$$r^2(1+m^2)=4c^2$$

ered, azaz

$$m=\pm\frac{\sqrt{4c^2-r^2}}{r}$$

mindig, mely egyenlet szintén mutatja: mikor lesz O a görbe ilyen vagy olyan singularis pontja.

Minden más pontban az érintő hajlásszögének tangense ismert módon képezve:

$$\tan\alpha=\frac{2(x^2+y^2-2cx)(x-c)-r^2x}{y(r^2-2(x^2+y^2-2cx))}$$

vagy M pont coordinátái függvényében:

$$\tan\alpha=\frac{2cr^2+r^2\xi-4c\xi^2}{\eta(4c\xi-r^2)}.$$

II.

A feladat második részében kívánt geometriai hely meghatározására először is fejezzük ki $P(x,\,y)$ coordinátáit M-éi (τ,μ) függvényében, kiindulván a

$$\tau=-\frac{r^2x}{(x^2+y^2-2cx)},\quad \mu=-\frac{r^2y}{(x^2+y^2-2cx)}$$

összefüggésekből és OM átmérő

$$\mu x-\tau y=0$$

egyenletéből.

Tekintve, hogy

$$\tau^2+\mu^2=r^2$$

mindig

$$x=\frac{2c\tau-r^2}{r^2}\tau,\quad y=\frac{2c\tau-r^2}{r^2}\mu$$

P pontban az érintő hajlásszöge tangensének már ismert értéke folytán az érintő kör sugarának egyenlete

$$y-\frac{2c\tau-r^2}{r^2}\mu=\frac{\mu(r^2-4c\tau)}{2cr^2+r^2\tau-4c\tau^2}\left(x-\frac{2c\tau-r^2}{r^2}\tau\right) \tag{6}$$

OM átmérőre OP távolság felező pontján átmenő merőleges egyenlete:

$$y - \frac{2c\tau - r^2}{2r^2}\mu = -\frac{\tau}{\mu}\left(x - \frac{2c\tau - r^2}{2r^2}\tau\right) \tag{7)}$$

6) és 7)-ből az érintő kör középpontjának coordinátái:

$$p = \frac{2c - \tau}{2}, \quad q = -\frac{\mu}{2}$$

Ezek alapján a P pontban érintő és O-n átmenő kör (nem a görbületi, vagy simuló) egyenlete:

$$x^2 + y^2 - (2c - \tau)x + \mu y = 0 \tag{8)}$$

Az $\overline{OM}$ átmérőjű kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 - \tau x - \mu y = 0 \tag{9)}$$

A két egyenlet összeadásával τ és μ határozatlanok kiküszöböltetvén, a keresett geometriai hely egyenlete:

$$x^2 + y^2 - cx = 0 \tag{10)}$$

a mi $\overline{AC}$ átmérő fölött írt kör.

Maksay Zsigmond.

KITŰZÖTT FELADATOK.

23. *Adva lévén az xOy szög, két pont: A és B az Ox száron és egy C pont az Oy száron, vonjunk a C pontból két egyenest, CM-et és CN-et, melyek antiparallelek az adott szögre nézve és az Ox szárat M és N pontokban metszik. Képezzük az MNC háromszög körül írt kör egyenletét. Határozzuk meg M-et és N-et úgy $AM = -BN$.*

24. *Egy parabola főhúrján AB-n, mint átmérőn kört rajzolunk, mely a parabolát C és D pontokban metszi. Bizonyíttassék be*

1^0, *hogy a CD és AB húrok párhuzamosak és kölcsönös távolságuk $2p$;*
2^0, *hogy a parabola csúcspontjából az említett körhöz húzott érintők a C és D pontokon mennek keresztül.*

25. *Az AB hosszúságú egyenes végpontjai az $xOy = \omega$ szög szárain siklanak. Az AB egyenes M pontja ekkor ellipszist ír le. Bizonyíttassék be, hogy az ellipszisnek M pontjában húzott deréklője keresztül megy az Ox és Oy egyenesekre az A és B pontokban húzott merőlegesek metszéspontján, I-n.*

26. *Ha*

$$X_{p+1} = aX_p + 1 + bY_p + 1$$
$$Y_{p+1} = cX_p + 1 + dY_p + 1$$

fejeztessék ki X_n és Y_n az X_1 és Y_1 függvénye gyanánt.

27. *Rajzoljunk az ABC háromszög körül kört és húzzuk meg ennek érintőit a B és C pontokban. Legyen ezek metszéspontja P. Húzzunk a P pontból tetszés szerinti egyenest, mely az AC egyenest B' és az AB egyenest C' pontokban, a kört pedig Q és R pontokban metszi. Bizonyíttassék be, miszerint*

$$C'Q \ : \ B'Q = C'R \ : \ -B'R.$$

28. *Legyen adva az $S(a,\ b,\ c,\ d)$ sugárrendszer. Messük ezt a C pontból húzott két egyenessel. Az egyiknek metszéspontjait az $a,\ b,\ c$ és d sugarakkal jeleljük $A,\ B,\ C$ és D-vel, a másikéit $A',\ B',\ C'$ és D'-tel. Bizonyíttassék be, miszerint*

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

hol az $(ABCD)$ symbolum értelmezését a következő egyenlet szolgáltatja:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \ : \ \frac{AD}{BD}.$$

A beküldött megoldásokat kérjük a papirosnak csak egyik oldalára, s minden megoldást külön lapra írni.

A megoldások legkésőbb a hó 20-áig bezárólag küldendők be. - Később beérkező megoldások csak a következő számok valamelyikében közölhetők.

ARITHMETIKA.

18. *Egy számot felbontunk törzstényezőire; legyen $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$. Felírandó először is e szám minden osztója; meghatározandó másodszor az összes osztók száma; bebizonyítandó harmadszor, hogy ha ez osztókat nagyság szerint növekedő sorba rendezzük, két, a végektől egyenlő távolságra álló osztó szorzata egyenlő N-nel, végre kiszámítandó az adott szám összes osztóinak szorzata. A nyert eredmények alkalmazandók a 630-as számra.*

1^0. N-nek minden osztója a következő alakú

$$a^m\, b^n\, c^p,$$

hol az m, n és p kitevők, melyek zérussal is lehetnek egyenlők legfeljebb α, β és γ-val egyenlők rendre.

Hogy felírhassuk N-nek minden osztóját, elegendő, ha m-nek minden értéket tulajdonítunk 0-tól α-ig, n-nek minden értéket 0-tól β-ig és p-nek minden értéket 0-tól γ-ig. Más szavakkal, a kérdéses osztók a következő szorzat egyes tagjai által advák:

$$(1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha)\,(1 + b + b^2 + \cdots + b^\beta)\,(1 + c + c^2 + \cdots + c^\gamma)$$

2^0. Az osztók száma egyenlő az előbbi szorzat tagjainak számával, az

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

-gyel.

3^0. Legyen d és d_1 két osztó, melyek a végektől egyenlő távolságra vannak. Azt állítom, hogy

$$d = \frac{N}{d_1}$$

feltevés szerint 1 és d meg d_1 és N között egyenlő számos osztója van N-nek. Ha tehát elosztom N-et a d_1-től N-ig terjedő osztók sorozatával, $\dfrac{N}{d_1}$-től $\dfrac{N}{N} = 1$ -ig terjedő és csökkenő sorozatát nyerem az N osztóinak. De ezek növekedő sorba rendezve ugyanazon számmal kezdődnek és ugyanannyi taggal bírnak, mint az 1-től d-ig terjedő sorozat, s így tehát $\dfrac{N}{d_1}$-nek okvetlenül egyenlőnek kell lennie d-vel, vagyis

$$dd_1 = N$$

4^0. Az előbbiekből következik, hogy N minden osztója a következő alakú

$$\frac{N}{d_1},$$

hol d_1 az N osztóinak valamelyike.

Ha szorozzuk tehát az összes osztókat egymással e szorzat a következő alakot ölti:

$$P = \frac{N^{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}}{P}$$

vagyis

$$P = \frac{N^{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}}{2}$$

Alkalmazás. Ha $N = 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$, az N osztói ekkor $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14,\ 15,\ 18,\ 21,\ 30,\ 35,\ 42,\ 45,\ 63,\ 70,\ 90,\ 10$ és 630; számuk

$$(1 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 24$$

és szorzatuk

$$630^{12} = 3\,909\,188\,328\,478\,827\,879\,681 \cdot 10^{12}$$

ALGEBRA.

21. *Alakíttassék át az*

$$(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5$$

összeget szorzattá.

Legyen

$$a - b = x, \qquad b - c = y$$

és ebből

$$c - a = -(x + y)$$

úgy, hogy az adott összeg a következő alakot nyeri:

$$x^5 + y^5 - (x+y)^5.$$

Ez utóbbi kifejezés, ha a kéttagú 5-ik hatványát kifejtjük a következő alakot nyeri.

$$-5(x^4y + 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4)$$

$$= -5xy(x^2 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$$

$$= -5xy(x+y)(x^2 + y^2 + xy)$$

Ha most ismét x és y helyébe $a-b$-et és $b-c$-t teszünk, az összeg a következő szorzattá változik:

$$5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

ANALYTIKAI GEOMETRIA.

23. *Adva lévén az xOy szög, két pont: A és B az Ox száron és egy C pont az Oy száron, vonjunk a C pontból két egyenest, CM-et és CN-et, melyek antiparallelek az adott szögre nézve és az Ox szárat M és N pontokban metszik. Képezzük az MNC háromszög körül írt kör egyenletét. Határozzuk meg M-et és N-et úgy $AM = -BN$.*

Ha a CM és CN egyenesek antiparallelek, akkor a következő relációt elégítik ki:

$$OM \cdot ON = OC^2. \qquad 1)$$

Jeleljük OC-t c-vel és OM-et m-mel, ekkor az előbbi összefüggés alapján

$$ON = \frac{c^2}{m}$$

A kör egyenlete az xOy ferdeszögű tengelyrendszerre vonatkoztatva:

$$x^2 + 2xy\ \cos\omega + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

hol $\omega = xOy\sphericalangle$.

Minthogy az x tengely a kérdéses kört M és N pontokban metszi, ezek koordinátái $(m,\ 0)$ és $\left(\frac{c^2}{m},\ 0\right)$ kielégítik a kör egyenletét, vagyis az

$$x^2 + 2Dx + F = 0$$

egyenlet gyökei m és $\frac{c^2}{m}$; tehát

$$2D = -(m + \frac{c^2}{m}\Big), \quad F = c^2$$

Hasonlóképpen az

$$y^2 + 2Ey + c^2 = 0$$

egyenlet egyik gyöke c, miből rögtön következik, hogy a második is c és ennélfogva

$$2E = -2c;$$

a keresett kör egyenlete tehát

$$x^2 + 2xy\ \cos\omega + y^2 - \left(m + \frac{c^2}{m}\right)x - 2cy + c^2 = 0 \qquad 2)$$

Ezen egyenlet oly kört ábrázol, mely az y tengelyt C pontban érinti, a mi különben az 1) alatti reláczió folyománya.

Ha OA-t a-val, OB-t b-vel jeleljük, az

$$AM = -BN$$

feltétel a következő alakot nyeri:

$$m - a = b - \frac{c^2}{m}$$

vagy

$$m + \frac{c^2}{m} = a + b$$

A feladat tehát arra redukálódik: Szerkesszünk két egyenest m-et és n-et, melyeknek összege $a+b$ és mértani középarányosa c. A megoldás csak akkor lehetséges, ha

$$(a+b)^2 - 4c^2 \geqq 0.$$

A szerkesztés külömben a következő. Az $a+b$ egyenes mnt átmérő felett félkört alakítok és ezt átvágom egy az $a+b$-vel párhuzamos és tőle c távolságra fekvő egyenessel. A metszéspontok bármelyikéből merőlegest húzva az $a+b$-re, ennek talppontja azt m és n részekre osztja.

A 2) alatti kör egyenlete akkor a következő alakot nyeri:

$$x^2 + 2xy\ \cos\omega + y^2 - (a+b)x - 2cy + c^2 = 0.$$

24. *Egy parabola főhúrján AB-n, mint átmérőn kört rajzolunk, mely a parabolát C és D pontokban metszi. Bizonyíttassék be*

1^0, hogy a CD és AB húrok párhuzamosak és kölcsönös távolságuk $2p$;

2^0, hogy a parabola csúcspontjából az említett körhöz húzott érintők a C és D pontokon mennek keresztül.

1^0. A feladatban tekintetbe vett parabola és kör mindegyike szimmetrikus lévén az Ox tengelyre nézve, D is szimmetrikus lesz B-vel ugyanezen tengelyre vonatkoztatva; CD tehát merőleges lesz Ox-re és ennek folytán párhuzamos AB-vel.

Jelelje E az AB-nek és G a CD-nek metszéspontját az Ox tengellyel. Legyen továbbá $OE = a, \quad OG = x$. Ekkor

$$CG^2 + GE^2 = CE^2 = AE^2$$

vagy a parabola egyenletéből

$$2px + (a-x)^2 = 2pa$$

mely egyenlet rendezve, a következő alakot ölti:

$$x^2 + 2(p-a)x + a(a-2p) = 0$$

Ebből

$$x = a - p \pm p$$

és így tehát

$$x_1 = a \qquad x_2 = a - 2p$$

Az első megoldás az AB, a második a CD húrnak felel meg és így látható, hogy $GE = a - (2p - a) = 2p$;

2^0. Látjuk, hogy

$$CG^2 = 2pOG = 2p(a-2p)$$

és minthogy

$$OG \times GE = (a-2p)2p$$

következik, hogy

$$CG^2 = OG \times GE.$$

Ebből látható, hogy az OCE háromszög derékszögű, tehát az OC egyenes érinti a kört.

25. *Az AB hosszúságú egyenes végpontjai az $xOy = \omega$ szög szárain siklanak. Az AB egyenes M pontja ekkor ellipszist ír le. Bizonyíttassék be, hogy az ellipszisnek M pontjában húzott deréklője keresztül megy az Ox és Oy egyenesekre az A és B pontokban húzott merőlegesek metszéspontján, I-n.*

Legyen $OA = \alpha, \quad OB = \beta, \quad BM = a, \quad MA = b.$

Az M pont által leírt ellipszis egyenlete az xOy ferdeszögű tengelyrendszerre vonatkoztatva.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\omega + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad 1)$$

Az ellipszis normálisának egyenlete az $M(x_0, y_0)$ pontban:

$$\frac{x - x_0}{X - Y\cos\omega} = \frac{y - y_0}{Y - X\cos\omega} \qquad 2)$$

hol

$$X = \frac{2x}{a^2} - \frac{2y\ \cos\omega}{ab}$$

$$Y = \frac{2y}{b^2} - \frac{2x\ \cos\omega}{ab}$$

A 2) alatti egyenlet még a következő alakra hozható:

$$\frac{x + y\ \cos\omega - (x_0 + y_0 \cos\omega)}{X} = \frac{x\ \cos\omega + y_0 - (x_0 \cos\omega + y_0)}{Y}.$$

De az M pont coordinátái

$$x_0 = \frac{a\alpha}{a+b} \qquad y_0 = \frac{b\beta}{a+b}$$

és így az ellipszis normálisának egyenlete a következő alakot nyeri:

$$\frac{x + y\ \cos\omega - \frac{1}{a+b}(a\alpha + b\beta\ \cos\omega)}{\frac{1}{a}(\alpha - \beta\ \cos\omega)} = \frac{x\ \cos\omega + y - \frac{1}{a+b}(a\alpha\ \cos\omega + b\beta)}{\frac{1}{b}(\beta - \alpha\ \cos\omega)}.$$

mely még a következő alakban is írható:

$$\frac{a(x + y\ \cos\omega - \alpha) + \frac{ab}{a+b}(\alpha - \beta\ \cos\omega)}{\alpha - \beta\ \cos\omega} = \frac{b(x\ \cos\omega + y - \beta) + \frac{ab}{a+b}(\beta - \alpha\ \cos\omega)}{\beta - \alpha\ \cos\omega}.$$

Ez végre könnyen belátható egyszerűsítés után a következő alakú lesz:

$$\frac{a(x + y\ \cos\omega - \alpha)}{\alpha - \beta\ \cos\omega} = \frac{b(x\ \cos\omega + y - \beta)}{\beta - \alpha\ \cos\omega} \qquad 3)$$

A normális 3) alatti egyenletéből világos, hogy az keresztül megy az

$$x + y\ \cos\omega - \alpha = 0$$

$$y + x\ \cos\omega - \beta = 0$$

egyenletű egyenesek metszéspontján.

De ez egyenesek nem egyebek, mint az x és y tengelyekre az A és B pontokban emelt merőlegesek és ezzel a feladatban foglalt kijelentés be van bizonyítva.

A kiküszöbölésről.

Gyakran előfordul, hogy több egyenlet több ismeretlennel lévén adva, ezek közül az egyik vagy másik az elsőnél magasabb fokú. Ilyenkor az ismeretleneknek egy hián való kiküszöbölése után fennmaradó egyenlet képezése még a legegyszerűbb esetekben is több vagy kevesebb nehézséggel jár, vagy ha az út, melyen haladnunk kell, világosan ki is van tűzve elénk, az eljárás nehézkes és nem áttekinthető. A következőkben néhány példán kívánom bemutatni a kiküszöbölési eljárást és a végegyenlet képezését.

Első eset.

Legyen adva a következő két legáltalánosabb alakú másodfokú egyenlet két ismeretlennel:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0 \tag{1}$$

$$ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi = 0, \tag{2}$$

kerestetik az y kiküszöbölése után fennmaradó egyenlet.

Írjuk az 1) és 2) alatti egyenleteket a következő alakban:

$$Py^2 + Qy + R = 0 \tag{3}$$

$$P'y^2 + Q'y + R' = 0 \tag{4}$$

hol

$$P = c, \quad Q = 2(bx + c), \quad R = ax^2 + 2dx + f \tag{5}$$

$$P' = \gamma, \quad Q' = 2(\beta x + \varepsilon), \quad R' = \alpha x^2 + 2\delta x + \varphi \tag{6}$$

Szorozzuk a 3) alatti egyenletet

$$M_1 = P'y + A'\text{-tel}$$

és a 4) alattit

$$M_2 = Py + A\text{-val.}$$

Lesz a 3)-ból

$$PP'y^3 + (P'Q + A'P)y^2 + (P'R + A'Q)y + A'R = 0 \tag{7}$$

és a 4)-ből

$$PP'y^3 + (PQ' + AP')y^2 + (PR' + AQ')y + AR' = 0 \tag{8}$$

Vonjuk le a 8)-at a 7)-ből és tulajdonítsunk az A és A' határozatlan mennyiségeknek oly értékeket, hogy az így nyert egyenlet az y bármely értékénél identikusan fennálljon, azaz az y-t ne is tartalmazza.

Ez akkor következik be, ha

$$PA' - P'A = PQ' - QP' \tag{9}$$

$$QA' - Q'A = -(RP' - PR') \tag{10}$$

s ekkor a megmaradó

$$RA' - R'A = 0 \tag{11}$$

a végegyenlet.

A helyett, hogy a 9)-ből és 10)-ből az A és A' értékeit kiszámítanám és ezeket a 11)-be belehelyettesíteném, e három utóbbi egyenletet alkalmas szorzókkal megszorzom és azután összeadom, miáltal az A és A' belőlük eltűnik. Ily szorzók

$$QR' - RQ'$$

$$RP' - PR'$$

$$PQ' - QP'$$

A szorzás és a rákövetkező összeadás a végegyenletet a következő alakban szolgáltatja:

$$(PQ' - QP')(QR' - RQ') - (RP' - PR')^2 = 0 \tag{12}$$

Második eset.

Legyen adva három legáltalánosabb alakú másodfokú egyenlet három ismeretlennel;

$$\begin{aligned} W_1 &= a_1y^2 + 2b_1yz + c_1z^2 + 2d_1y + 2c_1z + f_1 = 0 \\ W_2 &= a_2y^2 + 2b_2yz + c_2z^2 + 2d_2y + 2c_2z + f_2 = 0 \\ W_3 &= a_3y^2 + 2b_3yz + c_3z^2 + 2d_3y + 2c_3z + f_3 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

melyekben a három első együttható állandó mennyiség, a két rákövetkező x-nek elsőfokú, az utolsó pedig x-nek másodfokú egész függvénye.

Hogy ezen egyenletekből y-t és z-t kiküszöbölhessük, megszorozzuk az egyenletek balodlalati az x, y és z három 6-odfokú függvényével T_1-, T_2- és T_3-mal és ezek együtthatóival azután úgy rendelkezünk, hogy a

$$W_1T_1 + W_2T_2 + W_3T_3$$

összeg azon tagjainak együtthatói, melyek y-t és z-t tartalmazzák zérussal legyenek egyenlők.

Hogy az eredményt lehetőleg áttekinthető alakban nyerjük, az 1) alatti egyenletek helyébe három, velük egyenértékű egyenletet vezetünk be, melyeknek alakja azonban kevésbé általános.

Tegyük fel, hogy

$$H = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3\\
E_1 &= e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3\\
F_1 &= f_1A_1 + f_2A_2 + f_3A_3\\
D_2 &= d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3\\
E_2 &= e_1B_1 + e_2B_2 + e_3B_3\\
F_2 &= f_1B_1 + f_2B_2 + f_3B_3\\
D_3 &= d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3\\
E_3 &= e_1C_1 + e_2C_2 + e_3C_3\\
F_3 &= f_1C_1 + f_2C_2 + f_3C_3
\end{aligned} \tag{3}$$

hol az A, B és C mennyiségek a

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns aldeterminánsai.

Ha az 1) alatti egyenletekből fokozatosan kiküszöböljük az y^2, yz és z^2 mennyiségeket, a következőket nyerjük:

$$\begin{aligned}
Hy^2 + 2D_1y + 2E_1z + F_1 &= 0\\
2Hyz + 2D_2y + 2E_2z + F_2 &= 0\\
Hz^2 + 2D_3y + 2E_3z + F_3 &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

melyek az 1) alattiakat helyettesíthetik; mindamellett a következő számítások megkönnyítése céljából még másik alakban fogjuk azokat felírni. Legyen ugyanis

$$5)\begin{cases} R_1 = HF_1 + 2(D_2E_1 - D_1E_2) + (E_2^2 - 4E_1E_3)\\ R_2 = HF_2 + 4(D_3E_1 - D_1E_3) - 2(D_2E_2 - 2D_3E_1 - 2D_1E_3)\\ R_3 = HF_3 + 2(D_3E_2 - D_2E_3) + (D_2^2 - 4D_1D_3) \end{cases}$$

s ha most a 4) alatti egyenleteket H-val szorozzuk, azok a következő alakra hozhatók:

$$6)\begin{cases} V_1 = (Hy + E_2)(Hy + 2D_1 - E_2) + 2E_1(Hz + 2E_3 - D_2) + R_1 = 0\\ V_2 = 2(Hy + E_2)(Hz + D_2) - 8D_3E_1 + R_2 = 0\\ V_3 = (Hz + D_2)(Hz + 2E_3 - D_2) + 2D_3(Hy + 2D_1 - E_2) + R_3 = 0 \end{cases}$$

A T_1, T_2, és T_3 függvények, melyek ama tulajdonsággal bírnak, hogy a

$$V_1T_1 + V_2T_2 + V_3T_3$$

szorzatot pusztán az x függvényévé teszik, a következők

$$T_1 = -4X(Hz + D_2)(Hz + 2E_3 - D_2) +$$

$$+8D_3(Y + E_2X) - 4(Z + D_2X)(Hz + D_2),$$

$$T_2 = 2X(Hy + 2D_1 - E_2)(Hz + 2E_3 - D_2)$$
$$+2(Y + E_2X)(Hz + 2E_3 - D_2)+$$
$$+2(Z + D_2X)(Hy + 2D_1 - E_2) + U. \qquad 8)$$
$$T_3 = 4X(Hz + D_2)(Hz + 2E_3 - D_2)-$$
$$-4(Y + E_2X)(Hy + E_2) + 8E_1(Z + D_2X). \qquad 9)$$

Ezekben X, Y, Z és U az x-nek határozatlan egész függvényei; még pedig az első, X, negyedfokú, a másik kettő, Y és Z, ötödfokú és az utolsó, U, hatodfokú.

Ha rövidség kedvéért

$$10)\begin{cases} HP = 4D_3R_1 + (2E_3 - D_2)R_2 - 2E_2R_3 \\ HQ = 4E_1R_3 + (2D_1 - E_2R_2 - 2D_2R_1) \\ H^2N = 4(D_2^2 - 4D_1D_3)R_1 + 4(D_2E_2 - 2D_1E_3 - 2D_3E_1)R_2+ \\ +4(E_2^2 - 4E_1E_3)R_3 + (R_2^2 - 4R_1R_3) \end{cases}$$

a $V_1T_1 + V_2T_2 + V_3T_3 = \Theta$ a következő alakot nyeri

$$11)\begin{cases} \Theta = (U + R_2XV_2+ \\ +2H(HPX + R_2Z - 2R_3Y)y+ \\ +2H(HQX + R_2Y - 2R_1Z)z+ \\ +H(2PY + 2QZ - HNX). \end{cases}$$

Hogy ezen kifejezés y-t és z-t ne tartalmazza, kell hogy X, Y, Z és U a következő egyenleteket elégítsék ki.

$$12)\begin{cases} U + R_2X = 0 \\ HPX + R_2Z - 2R_3Y = 0 \\ HQX + R_2Y - 2R_1Z = 0 \end{cases}$$

A Θ ekkor a következő alakot nyeri

$$\Theta = 2HPY + 2HQZ - H^2NX. \qquad 13)$$

A 12) alatti egyenletekből következik, hogy:

$$(2PR_1 + QR_2)HX = -(R_2^2 - 4R_1R_3)Y$$
$$(2QR_3 + PR_2)HX = -(R_2^2 - 4R_1R_3)Z;$$

vagyis, hogy az X osztható $R_2^2 - 4R_1R_3$-mal. De minthogy mindkettő, mint az 5) alatti egyenletekből kitűnik, negyedfokú egész függvény, a hányados csak állandó szám lehet, melyet tetszés szerint választhatunk. Válasszuk ezt a negatív előjellel vett H^4 reciprok értékének, akkor

$$H^4X = -(R_2^2 - 4E_1R_3),$$
$$H^3Y = 2PR_1 + QR_2, \qquad 14)$$
$$H^3Z = 2QR + PR_2);$$

ismeretesek lévén X, Y és Z, a 12) alatti egyenletek elseje szolgáltatja U-t is.

Végre a 14) alatti egyenletek segélyével a Θ a következő végleges alakot nyeri:

$$\Theta = \frac{1}{H^2}[N(R^2 - 4R_1R_3) + 4(P^2R_1 + PQR_2 + Q^2R_3)] \qquad 15)$$

mely zérussal egyenlítve, a végegyenletet szolgáltatja.

Serret, Cours d'Algebre supérieure IV. kiadása nyomán.)

Az n első egész szám p-edik hatványai összegének kiszámításáról.

Hogy az

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

hatványösszeget képezhessük, néhány segédtételre van szükségünk, melyeket a következőkben levezetünk.

Jelentse $f(x)$ az

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Mx + N$$

alakú egész függvényét az x-nek. Jelentsék továbbá

$$f_0, \quad f_1, \ldots f_k \tag{1}$$

a függvény azon értékeit, melyeket ez felvesz, ha x helyébe az $x - 0$, $x_1, \ldots, x_k$ értékeket helyettesítjük.

Legyen

$$f'_0 = f_1 - f_0, \quad f'_1 = f_2 - f_1, \quad \ldots \quad f'_{n-1} = f_n - f_{n-1} \tag{2}$$

$$f_0\text{''} = f'_1 - f'_0, \quad f''_1 = f'_2 - f'_1, \quad \ldots \quad f''_{n-2} = f'_{n-1} - f'_{n-2} \tag{3}$$

s általánosságban

$$f_0^k = f_1^{k-1} - f_0^{k_1} \tag{4}$$

A 2)-ből következik, hogy

$$f_1 = f_0 + f'_0, \quad f_2 = f_1 + f'_1, \quad \ldots, f_n = f_{n-1} + f'_{n-1} \tag{5}$$

ha 3)-at is tekintetbe vesszük, lesz:

$$f_2 = f_0 + 2f'_0, + f_0^{\text{''}}, \quad f_3 = f_1 + 2f'_1 + f_1^{\text{''}}$$

s általánosságban

$$f_k = f_0 + \binom{k}{1} f'_0 + \binom{k}{2} f_0^{\text{''}} + \ldots + f_0^k \tag{6}$$

Hogy a 6) helyes, azt úgy bizonyítjuk, hogy megmutatjuk, miszerint helyes marad, ha k helyébe $k+1$-et írunk. Ugyanis

$$f_{k+1} = f_1 + \binom{k}{1} f'_1 + \binom{k}{2} f_1^{\text{''}} + \ldots + f_1^k$$

$$f_{k+1} = (f_0 + f'_0) + \binom{k}{1}(f'_0 + f_0^{\text{''}}) + \binom{k}{2}(f_0^{\text{''}} + f_0^{'''}) + \ldots + f_0^k + f_0^{k+1}$$

$$f_{k+1} = f_0 + \left[1 + \binom{k}{1}\right] f^{{}'_0 + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] f_0'' + \ldots + f_0^{k+1}}$$

mely egyenlet a következő alakban írható.

$$f_{k+1} = f_0 + \binom{k+1}{1} f'_0 + \binom{k+1}{2} f_0^{\text{''}} + \ldots + f_0^{k+1}$$

a közismeretes

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r} \tag{7}$$

összefüggésnél fogva.

Legyen

$$f(x) = x^p, \quad \text{és}\, x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \; ldots, \quad x_n = n$$

akkor a 6)-nál fogva:

$$x^p = f_0 + \frac{x}{1} f'_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} f_0^{\text{''}} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_0^{'''} + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p} f_0^p \tag{8}$$

s ha ezen egyenletbe fokozatosan $0, \; 1, \; 2, \; \ldots \; n$-et helyettesítünk s a nyert eredményeket összeadjuk, a következő eredményt kapjuk:

$$S_p = f'_0 \sum_1^n \frac{x}{1} + f_0^{\text{''}} \sum_1^n \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \cdots + f_0^k \sum_1^n \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p} \tag{10}$$

De

$$\sum_1^n \frac{x}{1} = \binom{n+1}{2}, \quad \sum_1^n \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} = \binom{n+1}{3}, \; \ldots, \; \sum_1^n \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1\cdot 2\cdots p} = \binom{n+1}{p+1}$$

mely képletek igazságát a 7) alatti egyenlet segélyével bizonyítjuk.

Ugyanis

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

$$\binom{n}{p+1} = \binom{n-1}{p+1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\binom{n-1}{p+1} = \binom{n-2}{p+1} + \binom{n-2}{p}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{p+2}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p}$$

$$\binom{p+1}{p+1} = 1$$

s így tehát ez utóbbi egyenletek összeadása után

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \cdots + \binom{p+1}{p} + 1 =$$

$$= \sum_1^n \binom{x}{p} = \sum_1^n \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}.$$

Lesz tehát a keresett összeg végleges alakja a következő

$$Sp = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} f_0' + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} f_0'' + \cdots +$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots(p+1)} f_0^p \qquad 11)$$

PÉLDÁK. - Legyen $p = 1$, akkor

$$f_0 = 0 \; f_1 = 1 \; f_2 = 2$$
$$f_0' = 1 \; f_1' = 1$$
$$f_0'' = 0$$

s így tehát

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}$$

Ha $p = 2$, a következő táblázat készítendő

0 1 4 9
1 3 5
2 2
0

és így tehát

$$S_2 = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ha $p = 3$, képezzük a következő táblázatot

0 1 8 27 64
1 7 19 37
6 12 18
6 6
0

és így tehát

$$S_3 = \frac{n(n+1)n}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6$$

vagy továbbá

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left[1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$

vagy végre

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n+n^2}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right]^2.$$

KITŰZÖTT FELADATOK.

29. *Adva lévén egy ellipszis legáltalánosabb egyenlete által, mily összefüggéseknek kell az együtthatók között fennállaniok, hogy az abscissa-tengely az egymással egyenlő kapcsolt átmérők egyikével essék össze.*

30. *Egy sík minden M pontján keresztül két hyperbola rajzolható, melyeknek egyenletei az Ox, Oy derékszögű koordináta tengelyekre vonatkoztatva*

$$a^2xy + ay + x = 0,$$

hol a változó paraméter; mily (C) görbe-vonalon kell az M pontnak feküdnie, hogy a hiperbolák e pontban derékszög alatt messék egymást?

Hány pontban metszi a (C) görbe-vonat az $a^2xy + ay + x = 0$ egyenletű hyperbolákat. Csak azon pontok veendők tekintetbe, melyek sem végtelen távol nincsenek, sem a koordináta rendszer kezdőpontjával nem esnek egybe.

Mily összefüggésnek kell a és b között fennállania, hogy a következő két hyperbola, melyeknek egyenletei

$$a^2xy + ay + x = 0,$$

$$b^2xy + by + x = 0,$$

egymást derékszög alatt messe oly pontban, mely külömbözik a koordináta-rendszer kezdőpontjától. Ezen összefüggés egy (C') görbe-vonalat értelmez; szerkesztendő a görbe-vonal. Hány véges és a kezdőponttól külömböző pontban metszi az előbb értelmezett (C) görbe-vonal a (C') görbe vonalat?

(Licenciatusi stipendium elnyerséért versenyzők írásbeli dolgozata, 1894.)

31. *Négy réz-súly összesen 40 kilogrammot nyom; segítségükkel minden egész számú súly $1-40$ kilogrammig megmérhető; mekkorák e súlyok?*

32. *Oldassék meg a következő egyenletrendszer:*

33. *Mely összefüggéseknek kell az*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx$$

kifejezés együtthatói közt fennállani, hogy ez teljes négyzet legyen.

34. *Adva van egy ellipszis E és ez ellipszis síkjában választunk egy H egyenest, mely annak egyik tengelyére merőleges. Feleljen meg a H egyenesnek egy kör, melyet h-val fogunk jelölni, s mely a következő feltételeknek felel meg: Középpontja az ellipszis azon tengelyén van, mely merőleges a H egyenesre és az ellipszis egy M pontjából a körhöz húzott érintő négyzetének aránya ugyanezen pontnak a H egyenestőli távolsága négyzetéhez állandó, azaz független az M pontnak helyzetétől az ellipszisen.*

1^0 *Határoztassék meg a kör középpontjának helyzete, sugarának nagysága és az állandó arány számértéke; melyek a feladat lehetőségének feltételei és ha ezek kielégítvék, határoztassék meg a kör helyzete a H egyeneshez és az E ellipszishez viszonyítva. Mely esetben nincs a körnek egy pontja sem az ellipszisen kívül vagy belül.*

2^0 *Legyen H és K két egyenes, melynek mindegyike az ellipszis egy-egy tengelyére merőleges. Legyen P a két egyenes metszéspontja és jelelje h és k a két egyenesnek megfelelő köröket. Bebizonyítandó, hogy a körök czentrálisa a P ponton megy keresztül. Mi lesz a P pont mértani helye, ha a körök érintkeznek? Mi lesz a P pont mértani helye, ha a körök közös szelője a P ponton megy keresztül?*

3^0 *Legyen H és H' két egyenes, mely az ellipszis nagy tengelyére merőleges és h és h' a megfelelő két kör. Bizonyíttassék be, hogy ha az M pont az ellipszisen mozog, a körökhöz húzott érintők összege vagy külömbsége állandó, ha az M pont által leírt ellipszisív az egyenesek közé esik vagy sem. Módosíttassék e tulajdonság kijelentése kellőképpen, ha a két egyenes a kis tengelyre merőleges.*

35. *Meghatározandók az*

$$x^6 - 2x^3 + 5 = 0$$

egyenlet gyökei.

(Dr. Frosch Károlytól, Siklóson.)

ALGEBRA.

32. *Oldassék meg a következő egyenletrendszer:*

$$x^4y^2 + x^2y^4 + z^4 = a^2 \tag{1)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a \tag{2)}$$

$$xyz = b \tag{3)}$$

Az 1) alatti egyenlet a következő alakra hozható:

$$x^2y^2(x^2 + y^2) = (a + z^2)(a - z^2) \tag{4)}$$

A 2) alatti pedig a következőre

$$x^2 + y^2 = a - z^2 \tag{5)}$$

Ezek összehasonlításából folyik a következő:

$$x^2y^2 = a + z^2; \tag{6)}$$

ebből és a 3)-ból kiküszöbölve xy-t, a következő egyenletet kapjuk:

$$z^4 + az^2 - b^2 = 0; \tag{7)}$$

he ennek gyökeit z_1^2 és z_2^2-tel jelöljük, x^2 és y^2 a következő másodfokú egyenletek

$$u^2 - (a - z_1^2)u + (a + z_1^2) = 0 \tag{8)}$$

$$u^2 - (a - z_2^2)u + (a + z_2^2) = 0 \tag{9)}$$

gyökeiként nyeretnek.

A feladatot megoldották: Friedmann Bernát, fg. VI. S. A. Ujhely; ifj. Imre János, fg. VIII. Nyíregyháza.

Jegyzet. Ifjú munkatársaink megoldása helyes ugyan, de nem t e l j e s. Ha ugyanis a 2) és 3) alatti egyenletekből kiszámítjuk x^2y^2 és $x^2 + y^2$ értékeit és ezeket az 1)-be helyettesítjük, a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{b^2}{z^2}(a - z^2) + z^4 - a^2 = 0,$$

mely rendezve a következő alakot ölti

$$z^6 - (a^2 + b^2)z^2 + ab^2 = 0.$$

Minthogy ez még a következő alakban is írható:

$$(z^2 - a)(z^4 + az^2 - b^2) = 0,$$

látjuk, hogy ez utóbbi egyenlet a 7) alattin kívül még a következőt tartalmazza

$$z^2 - a = 0.$$

A z^2-nek ezen értéke mellett a hozzátartozó x^2 és y^2 értékeket az

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x^2y^2 = \frac{b^2}{a}$$

egyenletek szolgáltatják.

33. *Mely összefüggéseknek kell az*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx$$

kifejezés együtthatói közt fennállani, hogy ez teljes négyzet legyen.

Hogy a fenti kifejezés egyenlő legyen

$$(x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c})^2,$$

kell, hogy

$$\sqrt{ab} = d, \quad \sqrt{bc} = e, \quad \sqrt{ca} = f$$

vagyis

$$ab - d^2 = bc - e^2 = ca - f^2 = 0$$

melyeket még a következő relácziók helyettesíthetnek:

$$ae - df = bf - de = cd - ef = 0$$

A feladatot megoldották: Friedmann Bernát, fg. VI. S. A. Ujhely; Suták Sándor fg. VIII. Nyíregyháza.

35. *Meghatározandók az*

$$x^6 - 2x^3 + 5 = 0$$

egyenlet gyökei.

(Dr. Frosch Károlytól, Siklóson.)

Megoldva az egyenletet x^3 szerint, lesz belőle

$$x^3 = 1 \pm \sqrt{1-5}$$

$$x^3 = 1 \pm 2i$$

s így tehát

$$x = \sqrt[3]{1 \pm 2i}$$

Az x-nek ezen értékét azonban a következő alakok egyikére kell hoznunk:

$$a + bi \quad \text{vagy} \quad r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Legyen

$$i \pm 2i = R\cos\tau \pm i(\sin\tau)$$

miből

$$R\cos\tau = 1$$

$$R\ \sin\tau = 2$$

Ezen egyenletekből:

$$R^2 = 5$$

$$R = \sqrt{5}$$

és

$$\sin\tau = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

A $\sqrt[3]{1+2i} = \sqrt[3]{R\cos\tau \pm i(\sin\tau)}$ három értéke ekkor a M o i v r e - t é t e l e alapján* a következő alakot nyeri:

$$\sqrt[3]{R}\left(\cos\frac{\tau + 2k\tau}{3} \pm i\sin\frac{\tau+2k\tau}{3}\right)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2$$

vagy részletesen

$$\sqrt[6]{5}(\cos\tau \pm i\sin\tau)$$

$$\sqrt[6]{5}\left[\cos\left(\tau + \frac{2\pi}{3}\right) \pm i\sin\left(\tau + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[6]{5}\left[\cos\left(\tau + \frac{4\pi}{3}\right) \pm i\sin\left(\tau + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

hol τ értéke a $\tan\tau = 2$ értelmében:

$$\tau = 63^\circ 26' 58''.$$

**) König Gyula: Bevezetés a felsőbb algebrába, p. 114.*

GEOMETRIA.

29. *Adva lévén egy ellipszis legáltalánosabb egyenlete által, mily összefüggéseknek kell az együtthatók között fennállaniok, hogy az abscissa-tengely az egymással egyenlő kapcsolt átmérők egyikével essék össze.*

Mindenekelőtt kifejezendő, hogy az ellipszis középpontja az x-tengelyen fekszik. Legyen az ellipszis általános egyenlete:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

akkor a középpont koordinátáit a következő egyenletrendszer gyökei szolgáltatják:

$$A\xi + B\eta + D = 0,$$

$$B\xi + C\eta + E = 0,$$

hogy ezen egyenleteket kielégítse az $\eta = 0$ megoldás, kell, hogy az

$$A\xi + D = 0$$

$$B\xi + E = 0$$

egyenletnek közös gyöke legyen. Ennek feltétele a következő

$$AE - BD = 0 \tag{1}$$

A további fejtegetések eszközlésére toljuk el a koordinátarendszer tengelyeit az eredeti helyzetökkel párhuzamos helyzetbe, s vigyük a koordinátarendszer kezdőpontját az ellipszis középpontjába. Az egyenlet ekkor a következő alakot ölti:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + G = 0 \tag{2}$$

Írjunk le az ellipszisnek az x tengelybe eső átmérője felett kört. E körnek egyenlete, minthogy a félátmérő hosszának négyzete

$$-\frac{A}{G}$$

a következő

$$A(x^2 + y^2) + G = 0 \tag{3}$$

Ha az 1)-ből levonom 2)-t, oly kúpszelet egyenletét kapom, mely az ellipszis és kör metszéspontjain megy keresztül. Ennek egyenlete a következő lesz:

$$y[(C - A)y + 2Bx] = 0$$

Ezen egyenlet egyenespárt ábrázol, melynek egyedeit a következő egyenletek adják

$$y = 0 \tag{4}$$

$$(A - C)y - 2Bx = 0 \tag{5}$$

Már most csak annak feltételét kell levezetnünk, hogy a 4) és 5) alatti egyenesek kapcsolt átmérőpárt jelentenek. Hogy az

$$y = kx$$

$$y = k'x$$

egyenesek a 2) által ábrázolt ellipszis kapcsolt átmérőit jelentsék, kell, hogy

$$A + B(k + k') + Ckk' = 0 \tag{6}$$

Ezen feltételt a 4) és 5)-re alkalmazva, a következő eredményt nyerjük:

$$2B^2 + (A - C)A = 0;$$

ezt egybevetve az 1) alatti feltétellel, kapjuk az együtthatók közt fennálló feltételekül a következőket:

$$\frac{C - A}{2B} = \frac{B}{A} = \frac{E}{D} \tag{7}$$

34. *Adva van egy ellipszis E és ez ellipszis síkjában választunk egy H egyenest, mely annak egyik tengelyére merőleges. Feleljen meg a H egyenesnek egy kör, melyet h-val fogunk jelölni, s mely a következő feltételeknek felel meg: Középpontja az ellipszis azon tengelyén van, mely merőleges a H egyenesre és az ellipszis egy M pontjából a körhöz húzott érintő négyzetének aránya ugyanezen pontnak a H egyenestőli távolsága négyzetéhez állandó, azaz független az M pontnak helyzetétől az ellipszisen.*

1^0 *Határoztassék meg a kör középpontjának helyzete, sugarának nagysága és az állandó arány számértéke; melyek a feladat lehetőségének feltételei és ha ezek kielégítvék, határoztassék meg a kör helyzete a H egyeneshez és az E ellipszishez viszonyítva. Mely esetben nincs a körnek egy pontja sem az ellipszisen kívül vagy belül.*

2^0 *Legyen H és K két egyenes, melynek mindegyike az ellipszis egy-egy tengelyére merőleges. Legyen P a két egyenes metszéspontja és jelelje h és k a két egyenesnek megfelelő köröket. Bebizonyítandó, hogy a körök czentrálisa a P ponton megy keresztül. Mi lesz a P pont mértani helye, ha a körök érintkeznek? Mi lesz a P pont mértani helye, ha a körök közös szelője a P ponton megy keresztül?*

3^0 *Legyen H és H' két egyenes, mely az ellipszis nagy tengelyére merőleges és h és h' a megfelelő két kör. Bizonyíttassék be, hogy ha az M pont az ellipszisen mozog, a körökhöz húzott érintők összege vagy külömbsége állandó, ha az M pont által leírt ellipszisív az egyenesek közé esik vagy sem. Módosíttassék e tulajdonság kijelentése kellőképpen, ha a két egyenes a kis tengelyre merőleges.*

Legyen az adott ellipsis egyenlete

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

Az egyenesé

$$x - m = 0 \tag{2}$$

A kívánt kör egyenlete

$$(x-p)^2 + y^2 = \zeta^2 \tag{3}$$

$M(x.y)$ az ellipsis kerületében egy pont, melyből a körhöz vont érintő hosszának négyzete

$$t^2 = (x-p)^2 + y^2 - \zeta^2$$

M pontnak az egyenestől mért távola

$$d^2 = (x-m)^2$$

Feltétel szerint

$$(x-p)^2 + y^2 - \zeta^2 = k(x-m)^2$$

hol k állandó szám.

Ez egyenlőségnek M bármely helyzete mellett állania kell, tehát érvényes akkor is, ha a főtengelyek végpontjaiban képzeljük, mely esetekre

$$(a-p)^2 - \zeta^2 = k(a-m)^2 \tag{4}$$

$$(a+p)^2 - \zeta^2 = k(a+m)^2 \tag{5}$$

$$p^2 + b^2 - \zeta^2 = km^2 \tag{6}$$

E három egyenletből k számértéke p és ζ nagysága meghatározható s a következő értékek erednek

$$k = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = E^2$$

az excentricitas szám-értéke

$$p = \frac{c^2}{a^2}m$$

$$\zeta^2 = b^2(1 - \frac{c^2m^2}{a^2}\Big)$$

vagy ha p elébbi értékét helyettezzük

$$\zeta^2 = b^2(1 - \frac{p^2}{c^2}\Big)$$

Minthogy k értéke valódi tört, a kör középpontja mindig az egyenes és az ellipsis középpontja közé esik s az m távolságot

$$-\frac{p}{m-p} = -\frac{k}{1-k} = -\frac{b^2}{c^2} \qquad \text{arányban osztja.}$$

Tehát a kör középpontja egyszerűen szerkeszthető, ha a gyűjtőpontot a kis féltengely végpontjával összekötvén az átfogóra m-et felrakjuk s a származott háromszöghöz hasonlót szerkesztünk. E derékszögű háromszög csúcsából az átfogóra merőlegest bocsátván a gyűjtőpontnak e merőleges talppontjától mért távola

$$p = m\ \cos^2\varphi, \quad \text{hol} \quad \cos\varphi = \frac{c}{a}.$$

ζ^2 értékéből kiolvasható, hogy csak addig valós, míg $(p) \leq (c)$ a mi a középpontnak a gyűjtőpont és az ellipsis középpontja között fekvését követeli.

$$\zeta_{max} = b, \quad \text{ha} \quad p = 0, \qquad \zeta_{min} = 0, \quad \text{ha} \quad p = c.$$

Ez esetben a megfelelő egyenes a directrix. Az ellipsis és a kör kölcsönös fekvését vizsgálván a

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{és}$$

$$a^2(x - \frac{c^2}{a^2}m)^2 + a^2y^2 = b^2\frac{a^2 - c^2m^2}{a^2}$$

egyenletekből y eliminatioja után:

$$(x-m)^2=0$$

ered, ami azt mondja, hogy a kör az ellipsist

$$x=m, \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2}$$

pontokban mindig érinti, tehát mindig egész terjedelmében az ellipszisen belől fekszik. Egyszersmind az is kitűnik ebből, hogy úgy a kör, mint az ellipszis a feladat lehető volta esetében az egyenest érintkezéspontjukban vágják. Az érintéspont azonban csak addig valós, míg $m \leq a$, azontúl képzetes. Ha H egyenes a kis tengelyre merőleges, egyenlete:

$$y-n=0$$

A kör egyenlete:

$$x^2+(y-q)^2=\zeta_1^2 \quad \text{és} \quad M(x,y)$$

az ellipszis tetszésszerint vett pontja:

$$t_1^2=x^2+(y-q)^2-\zeta_1^2$$
$$d_1^2=(y-n)^2$$

Feltétel szerint

$$x^2+(y-q)^2-\zeta_1^2=k_1(y-n)^2$$

Ezen egyenlet helyes marad x és y bármely értékénél, melyek az ellipsis egyenletét kielégítik, tehát ha M a főtengelyek végpontjaiban van is, midőn:

$$(b-q)^2-\zeta_1^2=k_1(b-n)^2 \tag{4a}$$

$$(b+q)^2-\zeta_1^2=k_1(b+n)^2 \tag{5a}$$

$$a^2+q^2-\zeta_1^2=k_1n^2 \tag{6a}$$

mely egyenletekből:

$$k_1=-\frac{c^2}{b^2}$$

$$q=-\frac{c^2}{b^2}n$$

$$\zeta_1^2=a^2\frac{b^4+c^2n^2}{b^4}=a^2(1+\frac{q^2}{c^2}\Big)$$

q értékéből következik, hogy ez esetben a kör középpontja mindig kívül esik, az egyenes és az ellipsis középpontja meghatározták közön s pedig az ellipszis középpontjától ellenkező oldalon, mint az egyenes. E pont az n távolságot

$$\frac{q}{q+n}=\frac{c^2}{a^2}$$

arányban osztja.

ζ_1 értéke mutatja, hogy a kör mindig lehetséges és a sugár n értékével nagyobbodik.

$$\zeta_{1min}=a, \quad \text{ha} \quad q=n=0.$$

Természetes, hogy ez esetben maximumról nem lehet szó. Az ellipszis és kör kölcsönös fekvését vizsgálván, a

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \text{és}$$

$$b^2x^2+b^2y+\frac{c^2}{b^2}n^2=a^2\frac{b^4+c^2n^2}{b^2}$$

egyenletekből x eliminácziója után:

$$(y-n)^2=0$$

ered, ami azt mondja, hogy a kör az ellipsist mindig érinti

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-n^2}, \quad y=n$$

pontokban. Az érintés valóban csak addig lehetséges, míg x elébbi értéke valós, tehát $b \geq n$, azaz: míg az egyenes az ellipszist érinti vagy metszi. Ha azonban ez nem történik a kör az ellipszist nem érinti s az egyenest nem metszi. Ez esetben a körnek egy pontja sincs az ellipsisen belül, hanem az utóbbi egész terjedelmében a körön belül fekszik.

(Folytatjuk).

GEOMETRIA.

34. Folytatás.

II.

Legyen a két egyenes:

$$H = x - m = 0, \quad H_1 = y - n = 0$$

s a megfelelő körök

$$(x - \frac{c^2}{a^2}m)^2 + y^2 = b^2\frac{a^4 - c^2m^2}{a^4}, \quad x^2 + (y + \frac{c^2}{b^2}n)^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n^2}{b^4}$$

A centralis egyenlete:

$$\frac{a^2x}{c^2m} - \frac{b^2y}{c^2n} = 1$$

egyszerűen a középpontok coordinátái alapján képezve. Ez egyenlet könnyen hozható következő alakra:

$$(x - m) - \frac{b^2m}{a^2n}(y - n) = 0$$

ha

$$c^2 = a^2 - b^2$$

helyettezést teszünk. De az utóbbi alak világosan mutatja, hogy a centralis mindig átmegy az

$$x - m = 0 \qquad \text{és} \qquad y - n = 0$$

egyenesek metszéspontján.

Az eddigiek alapján egyszerűen, minden számítás nélkül következik, hogy ha az elébbi körök érintkeznek, ez érintkezés csak az ellipszis kerületében történhetik, tehát a körök egyidejűleg az ellipszist is érintik, mivel pedig a megfelelő egyenesek mindig a kör és ellipszis érintkezéspontján mennek át, ezek metszése szintén az ellipszis kerületében történik mindig, azaz P pont geometriai helye maga az ellipszis.

Ha a körök közös szelője átmegy P ponton, akkor az elébbi meggondolásokból következik, hogy e közös szelő mindig érintője az ellipszisnek is a P pontban, tehát a geometriai hely ismét az elébbi: maga az ellipszis.

Ez állításokat analytikailag is igazolhatjuk.

A két kör érintkezésének föltétele:

$$c^2\sqrt{b^4m^2 + a^4n^2} = b^3\sqrt{a^4 - c^2m^2} - a^3\sqrt{b^4 + c^2n^2},$$

mert a kisebb kör a nagyobban fekszik, tehát csak belől érintheti a nagyobbat. A kifejezést rationalissá téve:

$$b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2$$

ered, ami m és n változókban az adott ellipszis egyenlete.

A két kör közös szelőjének egyenlete:

$$2b^2mx + 2a^2ny = b^2m^2 + a^2n^2 + a^2b^2$$

s így ha ez átmegy $P(m, n)$ ponton:

$$b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2$$

következik, ami szintén az ellipszis egyenlete m, n változókban.

III.

Legyen

$$H = x - m = 0, \qquad H_1 = x - m_1 = 0$$

két a nagy tengelyre merőleges egyenes egyenlete. A megfelelő körök:

$$(x - \frac{c^2}{a^2}m)^2 + y^2 = b^2\frac{a^4 - c^2m^2}{a^4}$$

és

$$(x - \frac{c^2}{a^2}m_1)^2 + y^2 = b^2\frac{a^4 - c^2m_1^2}{a^4}$$

egyenletekben advák. Feltétel szerint:

$$t^2 = \frac{c^2}{a^2}(x - m)^2$$

$$t_1^2 = \frac{c^2}{a^2}(x-m_1)^2$$

azaz:

$$t = \pm\frac{c}{a}(x-m), \quad t_1 = \pm\frac{c}{a}(x-m_1)$$

Ha M pont az egyenesek közé esik, akkor pl.

$$m_1 < x < m$$

vagy fordítva. De ez esetben

$$x - m_1 \qquad \text{és} \qquad x - m$$

különböző előjelűek úgy, hogy:

$$t = -\frac{c}{a}(x-m), \qquad t_1 = \frac{c}{a}(x-m_1)$$

veendő, hogy a t és t_1 távolságok pozitív értékek legyenek.

E két egyenletből pedig.

$$t + t_1 = \frac{c}{a}(m - m_1)$$

állandó.

Ha M pontot az egyenesek meghatározták távon kívül esik:

$$x \gtrless m \qquad \text{és} \qquad x \gtrless m_1$$

áll. Úgyde az esetben

$$x - m \qquad \text{és} \qquad x - m_1$$

mindig egyenlő jelűek és így pl.:

$$t = \frac{c}{a}(x-m), \quad t_1 = \frac{c}{a}(x-m_1),$$

honnan:

$$t - t_1 = \frac{c}{a}(m_1 - m)$$

állandó.

Ha az egyenesek a kis tengelyre merőlegesek, tehát:

$$H = y - n = 0 \qquad H_1 = y - n_1 = 0$$

egyenletekben adván és a megfelelő körök egyenletei:

$$x^2 + (y + \frac{c^2}{b^2}n)^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n^2}{b^4}$$

és

$$x^2 + (y + \frac{c^2}{b^2}n_1)^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n_1^2}{b^4}$$

Feltétel szerint:

$$t^2 = -\frac{c^2}{b^2}(y-n)^2$$

$$t_1^2 = \frac{c^2}{b^2}(y-n_1)^2$$

honnan az érintők képzetesek, a mi természetes, mert, mint kimutattuk ez esetben az ellipszis minden M pontja a körökön belől fekszik. Ha azonban $\frac{c^2}{b^2}$-et absolut értékében vesszük, akkor t és t_1 a köröknek M ponton átmenő átmérőjére e pontban emelt merőleges hurok felét jelentik, vagyis a tétel ez esetben így fogalmazható: Ha H és H_1 a kis tengelyre merőleges egyenesek s h és h' a megfelelő körök, akkor az ellipszis egy tetszésszerinti pontján átmenő átmérőkre ez M pontban emelt merőleges hurok összege vagy különbsége állandó, a szerint, amint az M pont által leírt ellipsis ív az egyenesek közé esik vagy sem. Ha tehát ez esetre d és d_1 az illető félhúrokat jelentik, melyek értékei:

$$d^2 = \zeta^2 - x^2 - (y-q)^2$$

$$d_1^2 = \zeta_1^2 - x^2 - (y-q_1)^2$$

egyenlőségekből következnek, a feltételek így alakulnak:

$$d = \pm\frac{c}{b}(y-n), \qquad d_1 = \pm\frac{c}{b}(y-n_1)$$

Ha most M pont az egyenesek közé esik, az az:

$$n_1 < y < n$$

az $y - n_1$ és $y - n$ különbségek ellenkező előjelűek s így d és d_1 positív voltára:

$$d = -\frac{c}{b}(y - n), \qquad d_1 = \frac{c}{b}(y - n_1)$$

értékek veendők honnan:

$$d + d_1 = \frac{c}{b}(n - n_1)$$

állandó, míg ha M az egyeneseken kívül esik, tehát pl:

$$y > n_1, \qquad y > n$$

egyenlőtlenségek állanak:

$$d = \frac{c}{b}(y - n), \qquad d_1 = \frac{c}{b}(y - n_1)$$

veendők, honnan:

$$d - d_1 = \frac{c}{b}(n_1 - n)$$

állandó, s így az értékek kétszerese is, a mi az állítás helyes voltát igazolja. A feladat a hyperbola esetében teljesen egyező eredményeket ad, azonban az utolsó tétel módosított alakja nélkül. Az eredmények egyszerűen felírhatók, ha az előbbiekben b^2 helyett $-b^2$-őt teszünk, vagy ami mindegy: b-t $i \cdot b$-vel cseréljük fel s az eredményeket megfelelő módon értelmezzük. Itt a megfelelő körök sugarainak csak alsóhatára van.

30. *Egy sík minden M pontján keresztül két hyperbola rajzolható, melyeknek egyenletei az Ox, Oy derékszögű koordináta tengelyekre vonatkoztatva*

$$a^2xy + ay + x = 0,$$

hol a változó paraméter; mily (C) görbe-vonalon kell az M pontnak feküdnie, hogy a hiperbolák e pontban derékszög alatt messék egymást?

Hány pontban metszi a (C) görbe-vonat az $a^2xy + ay + x = 0$ egyenletű hyperbolákat. Csak azon pontok veendők tekintetbe, melyek sem végtelen távol nincsenek, sem a koordináta rendszer kezdőpontjával nem esnek egybe.

Mily összefüggésnek kell a és b között fennállania, hogy a következő két hyperbola, melyeknek egyenletei

$$a^2xy + ay + x = 0,$$

$$b^2xy + by + x = 0,$$

egymást derékszög alatt messe oly pontban, mely külömbözik a koordináta-rendszer kezdőpontjától. Ezen összefüggés egy (C') görbe-vonalat értelmez; szerkesztendő a görbe-vonal. Hány véges és a kezdőponttól külömböző pontban metszi az előbb értelmezett (C) görbe-vonal a (C') görbe vonalat?

(Licenciatusi stipendium elnyeréséért versenyzők írásbeli dolgozata, 1894.)

Annak kifejezésére, hogy az (a) görbe-vonal az $M(\alpha, \beta)$ ponton megy keresztül, a következő egyenletet nyerjük:

$$a^2\alpha\beta + a\beta + \alpha = 0 \qquad 1)$$

mely a-nak két értékét a'-et és a''-t szolgáltatja. Fejezzük ki azon körülményt; hogy az (a') és (a'') hyperbolák érintői az M pontban egymásra merőlegesek, egyenlet alakjában. E hyperbolák érintői a következő egyenletek által advák:

$$(a'^2\beta + 1)(x - \alpha) + (a'^2\alpha + a')(y - \beta) = 0$$

$$(a''^2\beta + 1)(x - \alpha) + (a''^2\alpha + a'')(y - \beta) = 0$$

tehát a merőlegesség feltétele

$$(a'^2\beta + 1)(a''^2\beta + 1) + (a'^2\alpha + a')(a''^2\alpha + a'') = 0$$

vagy kifejtve

$$(a'^2a''^2(\alpha^2 + \beta^2) + (a'^2 + a''^2)\beta + a'a''(a' + a'')\alpha + a'a'' + 1 = 0 \qquad 2)$$

Az 1) alatti egyenletből következik, hogy:

$$a'a'' = \frac{1}{\beta} \qquad a' + a'' = -\frac{1}{\alpha}$$

miből

$$a'^2 + a''^2 = (a' + a'')^2 - 2a'a'' = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\beta}$$

Ezen értékeket a 2)-be helyettesítve, ez a következő alakot veszi fel:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}-1=0;$$

vagy a nevezők eltávolítása után

$$\alpha^4+\beta^3=0$$

A (C) tehát *negyedrendű, parabolikus* görbe-vonal. Hogy az

$$x^4+y^3=0$$

$$a^2xy+ay+x=0$$

görbe vonalak valós és véges távolságban fekvő metszéspontjainak számáról tájékozódhassunk, keressük azon egyenes vonalak számát, melyek a koordináta-rendszer kezdőpontján és a két görbe-vonal egy-egy metszéspontján mennek keresztül. Egy ilyen egyenes egyenlete:

$$y=ux$$

Ezen egyenletből és a két megelőzőből kiküszöböljük az x-et és y-t. A hány valós gyöke lesz a származó egyenletnek, melyben u az ismeretlen, annyi lesz a keresett pontok száma. A kiküszöbölés után nyert egyenlet a következő:

$$a^2u^4-au-1=0$$

Ezen egyenletnek csak 2 valós, még pedig egy positív és egy negatív gyöke van.*) Ha α és β a coordinátái az

$$a^2xy+ay+x=0$$

$$b^2xy+by+x=0$$

egyenletek által értelmezett hyperbolák egy közös pontjának, annak feltételét, hogy e görbevonalak merőlegesek egymással az $M(\alpha,\ \beta)$ pontban, a következő egyenlet fejezi ki.

$$(a^2\beta+1)(b^2\beta+1)+(a^2\alpha+a)(b^2\alpha+b)=0$$

s ha ebben α és β helyébe az

$$a^2\alpha\beta+a\beta+\alpha=0$$
$$b^2\alpha\beta+b\beta+\alpha=0$$

egyenletekből nyert értékeket helyettesítjük, az a és b között relácziót nyerünk, mely a (C') görbe vonalat értelmezi. Kiküszöbölve a megelőző egyenletekből $\alpha\beta$-át, a következő egyenlete nyerjük:

$$ab\beta+(a+b)\alpha=0$$

melyből és a következőből:

$$a^2\alpha\beta+a\beta+\alpha=0$$

$$\beta=\frac{1}{ab}$$

$$\alpha=-\frac{1}{a+b}$$

A (C') egyenlete tehát

$$(a^2\frac{1}{ab}+1)(b^2\frac{1}{ab}+1)+ab\left(1-\frac{a}{a+b}\right)\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=0$$

vagy a nevezők eltávolítása után

$$(a+b)^4+a^3b^3=0$$

Ha a-t és b-t egy pont koordinátáinak tekintjük, e reláczió egy görbevonalat értelmez, melynek egyenlete

$$(x+y)^4+x^3y^3=0 \qquad (C')$$

A (C') görbevonal keresztül megy a koordináta rendszer kezdőpontján. Keressük érintőjét e pontban.

Az érintő alakja a következő lesz:

$$y-ux=0$$

kérdezzük, hogy az u mely értékeinél lesz ez egyenesnek és a (C') görbevonalnak legalább két egybeeső pontja? Kiküszöbölve y-t a két egyenletből, a következőt nyerjük:

$$x^2=-\frac{(1+u)^4}{u^3}$$

s ez egyenlet két gyöke akkor egyenlő, ha $u=-1$; a keresett érintő egyenlete tehát

$$x+y=0$$

vagyis oly egyenes, mely a positív x tengellyel $135°$-nyi szöget képez.

Látható továbbá a (C') alatti egyenletből, hogy a görbevonalnak valós pontjai csak ott vannak, hol a pontok koordinátái különböző előjelűek; vagy az

$$y=ux$$

$$x^2=-\frac{(1+u)^4}{u^3}$$

egyenletekből, ha $u<0$.

A görbevonal czentrikusan-szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára nézve; elegendő x^2 változásait tanulmányozni, ha u változik; u változhatik $-\infty$-tól 0-ig.

Vizsgáljuk tehát a

$$z=-\frac{(1+u)^4}{u^3}$$

függvény változásait. A függvény *derivátája*, vagyis a

$$\lim_{u_1=u}\frac{z_1-z}{u_1-u}=z'=\frac{(1+u)^3}{u^4}(3-u)$$

kifejezés előjele mindig megegyezik az $(1+u)$ előjelével; az $x^2=z$ változásait tehát a következő táblázat tünteti fel:

u	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0
z'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
x^2	$+\infty$	fogy	0	növekedik	$+\infty$

Keressük már most a (C) és a (C') metszéspontjait. Küszöböljük ki ismét az

$$x^3y^3+(x+y)^4=0$$
$$x^4+y^3=0$$
$$y-ux=0$$

egyenletekből az x-et és az y-t. Az eredmény a következő:

$$u^9+(1+u)^4=0$$

Ugyancsak a következő czikk**) fejtegetéséből következik, hogy a fenntebbi egyenletnek csak egy valós gyöke van, mely 1 és -1 között fekszik. A két görbevonal tehát csak *egy* véges és a kezdőponttól különböző pontban metszi egymást.

*) Lásd a következő czikket.

**) Jelen számból térszűke miatt kimaradt. A jövő kettős számban fogjuk közölni.

Szerk.

Jegyzet a 30. feladat megoldásához.

I.

Hogy az

$$a^2u^4-au-1=0$$

egyenletnek csak 2 valós, még pedig egy positív és egy negatív gyöke van, azt a Descartes-féle jelszabály segítségével ismerhetjük fel. E szabály következőképpen hangzik:

Valamely egyenletben a positív gyökök száma sohasem nagyobb az ezen egyenletben foglalt jelváltozások számánál.

Valamely egyenletben a negatív gyökök száma sohasem nagyobb, mint a megfelelő negatív*) egyenletben foglalt jelváltozások száma.

Minthogy a jelek sorozata az

$$a^2u^4-au-1=0$$

egyenletben

$$+\quad -\quad -$$

a jelváltozások száma 1, s így legfeljebb 1 positív gyök létezik. A negatív egyenletben a jelek sorozata a következő:

$$+\quad +\quad -$$

így a jelváltozások száma ismét 1. Minthogy végre az

$$a^2u^4 - au - 1 = 0$$

egyenlet első és utolsó tagja *ellenkező* előjelű, az egyenletnek legalább *egy* valós gyöke van; minthogy másrészt az egyenlet fokszáma páros, az egy valós gyök mellett *még egy* valós gyöknek kell előfordulni. Ezen eredmény összevetéséből a Descartes-féle jelszabály eredményeivel, következik, hogy az egyenletnek 2 és *csak* 2 valós gyöke van, még pedig egy positív és egy negatív. A Descartes-féle jelszabály levezetése megtalálható: König Gyula " Analízis" első kötete, második részének 132. és 133. pontjaiban.

*) A $g(x) = 0$ egyenletnek megfelelő negatív egyenlet a $(g - x) = 0$.

II.

Hogy az

$$u^9 + (u+1)^4 = 0$$

egyenletnek csak egy valós gyöke van, mely 0 és 1 között fekszik, az *Sturm-tételével* mutatható ki.

Hogy ezt megfogalmazhassuk, a következőket kell előrebocsátanunk:

Legyen adva az $f(x) = 0$ egyenlet s képezzük az $f'(x) = 0$ egyenletet, melyben $f'(x)$ az $f(x)$-ből a következőképpen származtatandó:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Osszuk el már most az $f(x)$-et, vagy annak valamely tetszésszerinti *állandó* A_1 számmal szorzott alakját $f(x)$-szel s legyen az osztás hányadosa $q_1(x)$, a maradék $-R_1(x)$. Ekkor

$$A_1 f(x) = f'(x) q_1(x) - R_1(x)$$

képezzük továbbá a következő analog alakú egyenleteket:

$$A_1 f'(x) = R_1(x) q_2(x) - R_2(x)$$

$$A_k R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x) q_k(x) - R_k(x)$$

$$A_l = R_{l-2}(x) = R_{1-l}(x) q_l(x) - R_l,$$

hol $A_1 \ldots A_l$ pozitív számok és R_l végre az x-től független számérték.

A *Sturn-féle függvények* sorozata a következő:

$$f(x), \quad f'(x), \quad R_1(x), \quad \ldots, \quad R_{k-1}(x), \quad R_k(x) \quad R_{k+1}(x), \quad \ldots, \quad R_1.$$

Ezek után Sturm-tétele a következőképpen hangzik:

Legyen a és b két valós szám, és $a < b$; e számok helyettesítése a Sturm-féle függvények sorozatába két számsort ad, melyben a jelváltozások száma legyen V_a, illetőleg V_b. Ekkor $V_a - V_b$ pozitív egész szám vagy 0, és *pontosan* az $f(x) = 0$ egyenlet azon α_i gyökeinek száma, melyekre nézve $a < \alpha_i \leqq b. **)$

Minthogy az

$$f(u) = u^9 + (1+u)^4 = 0$$

egyenletben

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = +1;$$

továbbá minden más $k < -1$ negatív számra nézve $f = (k) < 0$, s minden $l > 0$ számra nézve $f(l) > 0$, az egyenletnek csak a (-1)-től 0-ig terjedő számtartományban lehetnek valós gyökei, e tartomány határainak, az $a = -1$ és $b = 0$ számoknak, az egyenlet Sturm-féle függvényei sorozatába való helyettesítése után oly két számsorozatot kapunk, melyekben a jelváltozások számaira,

$$V_{-1} - V_0 = 1.$$

Így tehát az

$$u^9 + (u+1)^4 = 0$$

egyenletnek *egy* és *csak egy* valós gyöke van, s ez a (-1) és 0 határok közé esik.

**)Lásd ugyancsak König "Analizis" czimű művében a második rész 134. és 135. pontjait.

ALGEBRA.

31. *Négy réz-súly összesen* 40 *kilogrammot nyom; segítségükkel minden egész számú súly* $1 - 40$ *kilogrammig megmérhető; mekkorák e súlyok?*

Legyenek e négy réz-súly szám értékei rendre x, y, z és u. Akkor minden szám $1 - 40$-ig a következő alakban fejezhető ki a feladat értelmében.

$$ax + by + cz + du.$$

hol az a, b, c és d mennyiségek csak a -1, 0 és 1 értékeket vehetik fel, mert minden súly egy-ugyanazon mérésénél csak legfeljebb 1-szer, 0-szor, vagy -1-szer (utóbbi esetben tudniillik akkor mikor a súly a megmérendő tárggyal együtt a mérleg ugyanazon serpenyőjébe jut,) fordulhat elő. Az x, y, z és u, tehát egy számrendszer alapszámának egymásra következő hatványai gyanánt tekinthetők, melyben azonban csak három számjegy fordul elő. E számrendszer alap száma ennélfogva nem lehet egyéb, mint a 3, s így tehát,

$$x = 3^0 = 1, \quad y = 3^1 = 3, \quad z = 3^2 = 9, \quad u = 3^3 = 27.$$

Pl: $6 = 1 \cdot 9 + (-1) \cdot 3; \quad 32 = 1 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1.$ stb

GEOMETRIA.

28. *Legyen adva az $S(a,\ b,\ c,\ d)$ sugárrendszer. Messük ezt a C pontból húzott két egyenessel. Az egyiknek metszéspontjait az $a,\ \ b,\ c$ és d sugarakkal jeleljük $A,\ B,\ C$ és D-vel, a másikéit $A',\ B',\ C'$ és D'-tel. Bizonyíttassék be, miszerint*

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

hol az $(ABCD)$ symbolum értelmezését a következő egyenlet szolgáltatja:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \ : \ \frac{AD}{BD}.$$

Húzzunk az S pontból párhuzamosat az OA egyenessel, míg az az OA' egyenest Q pontban metszi. Húzzunk továbbá az S pontból az OA' egyenessel párhuzamosat, míg ez az OA-t R pontban metszi.

Az SAR és $A'SQ$ háromszögek hasonlóságából folynak a következő aránylatok:

$$AR : RS = SQ' : Q'A'$$

vagy minthogy

$$SR = Q'O \quad \text{és} \quad SQ' = RO$$

$$AR : OQ' = RQ : Q'A'$$

miből

$$AR = \frac{OQ' \cdot RO}{Q'A'}$$

Minthogy azonban OQ' és RO *állandó* mennyiségek, ennélfogva szorzatuk is állandó és értéke jeleltessék k-val. Így tehát

$$AR = \frac{k}{Q'A'}$$

$$CR = \frac{k}{Q'C'}$$

Minthogy pedig:

$$AC = AR - CR = \frac{k}{Q'A'} - \frac{k}{Q'C'},$$

azért

$$AC = \frac{k(Q'C' - Q'A')}{Q'A' \cdot Q'C'} = \frac{k \cdot A'C'}{Q'A' \cdot Q'C'}.$$

Hasonlóképpen

$$BC = \frac{k \cdot B'C'}{Q'B' \cdot Q'C'}$$

miből

$$AC \ : \ BC = \frac{A'C'}{Q'A'} : \frac{B'C'}{Q'B'} = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{Q'B'}{Q'A'}$$

Éppígy következik, hogy:

$$AD \ : \ BD = \frac{A'D'}{Q'A'} : \frac{B'D'}{Q'B'} = \frac{A'D'}{B'D'} \cdot \frac{Q'B'}{Q'A'}$$

miből végre

$$AC \ : \ BC \ :: \ AD \ : \ BD = A'C' \ : \ B'C' \ :: \ A'D' \ : \ B'D'$$

27. *Rajzoljunk az ABC háromszög körül kört és húzzuk meg ennek érintőit a B és C pontokban. Legyen ezek metszéspontja P. Húzzunk a P pontból tetszés szerinti egyenest, mely az AC egyenest B' és az AB egyenest C' pontokban, a kört pedig Q és R pontokban metszi. Bizonyíttassék be, miszerint*

$$C'Q \ : \ B'Q = C'R \ : \ -B'R.$$

Nevezzük a BC és QR egyenesek metszéspontját A'-nek.

Kimutatható, hogy

$$(C'B'QR) = (PA'QR).$$

Minthogy az $A(BCQR)$ sugársor szögei: BAP, CAQ, BAR és CAR rendre egyenlők a $B(PCQR)$ sugársor szögeivel: PBC, CBQ, PBR és CBR szögekkel, e két sugársor úgy egymásra fektethető, hogy B az A-ra jut, és az AB, AC, AQ és AR egyenesek *(nem távolságok)* a BP, BC, BQ és BR egyenesekkel *(nem távolságokkal)* összeesnek.

Vigyük rá az AB egyenesre az $AP_1 = BP$, az AC egyenesre az $AA_1 = BA'$, az AQ egyenesre az $AQ_1 = BQ$ és végre az AR egyenesre az $AR_1 = BR$ távolságokat. Ekkor P_1, A_1 Q_1 és R_1 egy egyenesbe esnek és

$$(P_1\,A_1\,Q_1\,R_1) = (PA'QR).$$

De az előbbi feladat eredménye értelmében

$$(C'\,B'\,Q\,R) = (P_1\,A_1\,Q_1\,R_1)$$

tehát

$$(C'\,B'\,Q\,R) = (PA'QR).$$

Hasonlóképpen kimutatható az $A(BCQR)$ és $C(BPQR)$ sugársorok egybevágóságából, hogy

$$(C'B'QR) = (A'PQR).$$

Keressük már most a $(PA'QR) = (A'PQR)$ symbolum számértékét. A symbolum értelmezésénél fogva

$$\frac{PQ}{A'Q} : \frac{PR}{A'R} = \frac{A'Q}{PQ} : \frac{AR}{PR}$$

miből

$$\frac{PQ}{A'Q} : \frac{A'Q}{PQ} = \frac{PR}{A'R} : \frac{A'R}{PR}$$

Vagy

$$\frac{PQ^2}{A'Q^2} = \frac{PR^2}{A'R^2}$$

mely egyenlőségből továbbá

$$\left[\frac{PQ}{A'Q} : \frac{PR}{A'R}\right]^2 = 1$$

és így

$$(PA'QR) = (A'PQR) = \pm 1$$

A két symbolum számértéke azonban csak akkor lehetne egyenlő a *pozitív* egységgel, ha 0 egybeesnék R-rel. Minthogy ezen eset általánosságban nem áll fönn, az érték csak a negatív egység lehet.

Vagyis

$$(PA'QR) = (A'PQR) = (C'B'QR) = -1$$

De ez utóbbi egyenletből

$$C'Q : B'Q :: C'R : B'R = -1$$

azaz

$$C'Q : B'Q = C'R : -B'R.$$

Q. E. D.

Egy tantétel a paraboláról *)

Legyenek MT, MT' az M pontból a parabolához vont érintők, melynek gyújtópontja F. Ekkor:

$$FM^2 = FT \cdot FT'$$

E relácziót igazolhatjuk az analytikai geometria segélyével, ha koordináta tengelyekül választjuk a parabola szimmetriatengelyét és a csúcsponti érintőt. Az $M(x_0,\, y_0)$ pontból a parabolához húzott érintők érintési pontjainak koordinátái meghatározhatók a következő egyenletekből:

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Az érintési pontok abscissái tehát a következő egyenlet gyökei:

$$(p(x + x_0))^2 - 2py_0^2 x = 0$$

vagy

$$p^2x^2 + 2p(px_0 - y_0^2)x + p^2x_0^2 = 0$$

Ha ez egyenlet gyökei x és x', akkor

$$FT = x + \frac{p}{2}, \quad FT' = x' + \frac{p}{2},$$

és ennek folytán

$$FT \cdot FT' = xx' + \frac{p}{2}(x + x') + \frac{p^2}{4},$$

vagyis:

$$FT \cdot FT' = x_0^2 + \frac{p}{2} \cdot \frac{2(y_0^2 - px_0)}{p} + \frac{p^2}{4},$$

mely egyszerűsítve a következő alakot nyeri:

$$y_0^2 + \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2;$$

e kifejezés az FM négyzetét ábrázolja.

A tétel a planimetria segélyével is bebizonyítható.

Húzzuk az MH egyenest, mely párhuzamos a parabola tengelyével s a mely FT'-et H-ban metszi.

Ismeretes, miszerint az FM felezi a TFT' szöget és hogy az FMT és HMT' szögek egyenlők. De minthogy az érintő a T' pontban egyenlő szögeket alkot a tengellyel és az FT' vezérsugárral, a HMT' és $MT'H$ szögek egyenlők; ennélfogva az FMT és $FT'M$ háromszögek szögei rendre egyenlők s így ezen háromszögek hasonlók, miből következik, hogy.

$$\frac{FM}{FT} = \frac{FT'}{FM}$$

vagyis

$$FT \cdot FT' = \overline{FM}^2.$$

Ha tehát egy TFT' szög felező egyenesén választunk egy M pontot, melyre nézve FM az FT és FT' mértani középarányosa, akkor létezik egy parabola, melynek gyújtópontja F és mely érinti az MT egyenest T pontban, és az MT' egyenest T' pontban.

Ha az MF egyenesen egy M' pontot választunk, melyre nézve $MF = FM'$, egy második parabolát fogunk nyerni, melynek gyújtópontja szintén F, s mely az $M'T$ és $M'T'$ egyeneseket a T és T' pontokban érinti.

E két parabola különben megoldását képezi a következő feladatnak:

Meghatározandók azon parabolák, melyeknek gyújtópontja F és melyek a T és T' pontokon mennek keresztül.

E megjegyzésből könnyen levezethető a következő tétel, melyet Lemoine Emil, az *"Intermédiaire des Mathématiciens"* szerkesztője állított fel, s mely a következőképpen hangzik:

Ha egy ellipszis egy M pontjában, melynek gyújtópontjai F és F', meghúzzuk a normálist s ezen két pontot választunk N-et és N'-et, melyekre nézve

$$\overline{MN}^2 = \overline{MN'}^2 = MF \cdot MF'$$

akkor az ONF' szög$=MNF$ szög és az $ON'F' = MN'F$.

Megjegyzendő, hogy miután:

$$MN^2 = MF \cdot MF'$$

és az NN' normális az FMF' szög felező egyenese, a parabolának mely az FN és $F'N$ egyeneseket az F és F' pontokban érinti, gyújtópontja az M pont.

Minthogy továbbá $FM + F'M = 2a$, ez utóbbi parabola vezérvonalának távolsága az ellipszis középpontjától O-tól egyenlő a-val; e vezérvonal érinti tehát az O pontból mint középponttól, az ellipszis nagy-tengelye mint átmérő körül leírt kört.

Lemoine tantételének bizonyítása a következőkben adatik.

Nevezzük m és m'-nek az NF és NF' egyenesek *auguláris-coefficienseit*; (az $y = mx + n$ egyenletből) μ és μ'-nek az NM és NO egyenesekéit.

Hogy igazoljuk az MNF és $F'NO$ szögek egyenlőségét, elegendő kimutatni a következő egyenlőség helyességét:

$$\frac{m - \mu}{1 + m\mu} = \frac{\mu' - m'}{1 + m'\mu'},$$

de ezen egyenlőség egyenértékű a következővel:

$$\frac{m + m'}{1 - mm'} = \frac{\mu + \mu'}{1 - \mu\mu'},$$

mely azt fejezi ki, hogy az FNF' és MNO szögeknek közös felező egyenesük van. A normális egyenlete az $M(x_o, y_o)$ pontban:

$$\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}}$$

Ha feltételezzük, hogy x és y az N pont koordinátái és b' az OM félátmérőnek megfelelő konjugált félátmérő b', akkor:

$$\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} = \frac{b'^2}{a^2 b^2}$$

Tudjuk továbbá, hogy $MF \cdot MF' = b'^2$, így tehát az N pont koordinátáit az

$$\frac{x - x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \varepsilon ab \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

egyenletek szolgáltatják. E koordináták a következők:

$$x = \frac{x_0}{a}(a + b\varepsilon)$$

$$y = \frac{y_0}{b}(a + b\varepsilon)$$

Tegyük fel, hogy az $\varepsilon = +1$ az N, az $\varepsilon = -1$ az N' pontot szolgáltatja.

Közvetlenül igazolható, miszerint

$$x^2 + y^2 = (a + b\varepsilon)^2$$

tehát

$$ON = (a + b) \quad \text{és} \quad ON' = (a - b).$$

Ezek után:

$$\mu = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}, \quad \mu' = \frac{a y_0}{b x_0},$$

tehát

$$\frac{\mu + \mu'}{1 - \mu\mu'} = \frac{ab(a + b)x_0 y_0}{b^3 x_0^2 - a^3 y_0^2}$$

Másrészt:

$$\frac{m + m'}{1 - mm'} = \frac{2ab(a + b)x_0 y_0}{(a + b)(b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2) - a - b)a^2 b^2}$$

s így tehát csak azt kell kimutatni, hogy

$$2(b^3 x_0^2 - a^3 x_0^2) = (a + b)(b^2 x_0^2 - a^2 x_0^2) - (a - b)a^2 b^2$$

mi semminemű nehézségekkel sem jár.

*)A "Bulletin de Mathématiques Spéciales" 1894. évi októberi számából.

Jegyzet az előbbi czikkhez.

(Jamet, marseilli tanártól.*)

Kimutatható, hogy a Lemoine-féle tétel ábrájában az $FNF'N'$ négyszög húrnégyszög.

(Ha ugyanis az $F'M$ egyenesre felvisszük az $MJ = MF$ hosszúságot, akkor az $MF' \cdot MF = MN' \cdot MN$ egyenlőség értelmében, $MF' \cdot MJ$ is egyenlő $MN' \cdot MN$-nel. Tehát az $JNF'N'$ négyszög húrnégyszög. De J és F pontok szimmetrikusak az NN' egyenesre az M pontban merőlegesen húzott egyenesre, mint tengelyre nézve. Ez pedig az $JNF'N'$ kör egy átmérője lévén, az F pont is az $JNF'N'$ körön fekszik, vagyis az $FNF'N'$ is húrnégyszög. *Szerk.)*

Abból, hogy az $FNF'N'$ négyszög húrnégyszög és hogy az $ONF' = N'NF$, következik, hogy $ONF' = N'F'F$-fel is; továbbá, hogy az $ON'F' = NN'F$ egyenlő egyszersmind az $NF'F$-fel is.

Abból, hogy $F'ON = F'ON'$ és $ON \cdot ON' = OF'^2$ következik, hogy a parabolának, mely NF'-et N-ben és $N'F'$-et N'-ben érinti, gyújtópontja az O. Minthogy $F'M$ e parabolának egy átmérője, az $N'F'O$ szög $= MF'N$ szöggel. -Hasonlóképpen látható, hogy $N'FO = MFN$.

Összefoglalva az egészet, azt látjuk, hogy a következő szögegyenlőségek állanak fenn:

$$1.\ FON = FON' \quad \text{és} \quad F'ON = F'ON';$$

$$2.\ ONF = F'NN' = F'FN' = MFN;$$

$$3.\ ONF = FNN' = FF'N' = MF'N;$$

$$4.\ ON'F' = FN'N = FF'N = MF'N';$$

$$5.\ ON'F = F'N'N = F'FN = MFN.$$

Nem szükséges említenem, hogy mind e szögegyenlőségek levezethetők bizonyos háromszögek hasonlóságából, ha a következő aránylatokból indulunk ki:

$$\frac{MN}{MF} = \frac{MF'}{MN} \qquad \text{és} \qquad \frac{MN'}{MF} = \frac{MF'}{MN'}$$

Az előbbi czikk második ábrájának tanulmányozása egy egyenesre vonatkozó megjegyzéssel végződik, mely az O-tól $OH = a$ távolságra fekszik. E megjegyzésnek több érdek és preczizitás kölcsönözhető, ha megfontoljuk, hogy a főkör H pontja az ellipszis M pontjának ordinátáján fekszik. Valóban kimutatható, hogy

$$FM = FG = a - c\ \cos FOH$$

hol FG az F pont távolsága a parabola vezérvonalától és

$$F'M = F'G' = a + c\ \cos FOH$$

(Ugyanis ha az $M(x_0 y_0)$ pont coordinátái x_0 és y_0 a következő egyenletek által advák:

$$x_0 = a\ \cos\varphi \qquad \text{és} \qquad y_0 = b\ \sin\varphi$$

bebizonyítandó, miszerint

$$\varphi = FOH.$$

Minthogy

$$(a - c\cdot\cos FOH)^2 = y_0^2 + (x_0 - c)^2 = b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi - 2ac\cdot\cos\varphi + c^2 =$$
$$= a^2\sin^2\varphi - c^2\sin^2\varphi + a^2 - a^2\sin^2\varphi - 2ac\cdot\cos\varphi + c^2 =$$
$$c^2\cos^2\varphi - 2ac\cdot\cos\varphi + a^2 = (a - c\cdot\cos\varphi)^2$$

következik, miszerint tényleg

$$\cos\varphi = \cos\ FOH.$$

Szerk.)

Az M az ellipszis egy pontja lévén, H és H' a főkör két pontja, melyek az M-mel egy ugyanazon, a nagy tengelyre merőleges egyenesen fekszenek, N és N' pedig azon pontok, melyben az ellipszis normálisa az M pontban az OH és OH' sugarakat metszi, kimondhatjuk végre, hogy az N és N' pontok mértani helyei két kör által advák, melyeknek középpontja O, és melyeknek sugarai $(a+b)$ és $(a-b)$.

*) "Bulletin de mathématiques spéciales" p.46.

Geometriai jegyzet.*)

A következőkben az a czélom, hogy elemi bizonyítását adjam a következő nagyon ismert tételnek:

Ha valamely változó hosszúságú AB egyenes A és B végpontjai egy szilárd xOy szög Ox és Oy szárain siklanak oly módon, hogy az OA és OB távolságok az $OA \times OB = m^2$ relácziót elégítik ki, az AB M középpontja egy hiperbolát ír le.

Jelelje az I betű az xOy szög felező egyenesének és az AOB háromszög körül írt körnek metszéspontját, I' a kör II' átmérőjének egyik végpontját és S az AB egyenes és az említett szögfelező egyenes metszéspontját.

A kör, melynek középpontja I' és mely az A és B pontokon megy keresztül, az OI egyenest messe az F és F' pontokban. E pontokra nézve

$$OF^2 = OF'^2 = OA \times OB = m^2$$

tehát az F és F' pontok szilárdak. Másrészt

$$OA \times OB = OI \times OS;$$

tehát

$$OF^2 = OF \times F'O = OI \times OS$$

s így tehát

$$(ISFF') = IF : SF :: IF' : SF' = -1,$$

azaz az F és F' pontok az IS távolságot harmonikusan osztják.**)

De ekkor az IM és SM sugarak az $F'MF$ szöget is harmonikusan osztják; s minthogy egymásra merőlegesek az MS az $F'MF$ szöget felezi.

Legyen K az F pont szimmetrikus pontja az MS tengelyre nézve és N az FK és MS metszéspontja; ekkor

$$MF' - MF = KF' = 2ON.$$

Azt állítom, hogy ON állandó.

Legyenek N, N', és H az F, F', és O projekcziói az MI egyenesre; akkor az (I) alatti egyenlőség, ha a benne foglalt hosszakat egy az AB egyenesre merőleges irányra vetítjük, a következőbe megy át:

$$(OH+NF)(F'N'-OH)=OH(OH+MI)$$

és ez, minthogy O az $F'F$ egyenes felező-pontja, a következőre redukálódik;

$$F'N'+NF=OH\cdot MI.$$

Minthogy az AOB háromszög területe állandó, (az $OA\times OB=m^2$ relácziónál fogva), azért

$$OH\times MB=const.=\lambda.$$

Az előbbi reláczió tehát a következő alakot ölti:

$$F'N'+NF=\lambda\frac{MI}{MB}$$

De az $\dfrac{MI}{MB}$ hányados állandó, mert az ABI egyenlő $\frac{1}{2}xOy$-nal.

Ha most a N, N' és F' pontokon keresztül menő kört tekintetbe vesszük, látjuk, hogy:

$$FN\cdot F'N'=OF^2-ON^2,$$

mi azt bizonyítja, hogy ON^2 állandó.

Tehát az M pont mértani helye hiperbola, melynek gyújtópontjai F és F'.

Rebuffel E.

*)"Journal de Mathématiques Élémentaires" publié par H. Vuiberrt 15-e année 1890-91. p 54.

**) Ugyanis:

$$IF=OF-OI,\qquad SF=OF-OS$$
$$IF'=OF'-OI,\qquad SF'=OF'-OS$$

tehát az

$$IF\cdot SF'+IF'\cdot SF=0$$

egyenlőség a következőre vezet:

$$(OF-OI)(OF'-OS)+(OF'-OI)(OF-OS)=0$$

miből

$$OF\cdot OF'-OI\cdot OF'-OF\cdot OS+OI\cdot OS+$$
$$+OF\cdot OF'-OI\cdot OF-OF'\cdot OS+OI\cdot OS=0$$

Minthogy

$$OF=FO'=-OF'$$

azért

$$OF\cdot F'O=OI\cdot OS$$