Elméleti verseny

1. feladat. *Arányosság* (egymástól független, rövid feladatok)

(a) Egy ideális, súlytalan rugó végére függesztett pontszerű test f frekvenciával fel-le rezeg. Mekkora lesz az új f' frekvencia, ha a rugót félbevágjuk, és a végére visszaakasztjuk a testet?

(b) A hidrogénatom sugara alapállapotban $a_0 = 0,0529$ nm (a „Bohr-sugár"). A „müonhidrogén" egy olyan hidrogénatom, melyben az elektront egy vele azonos töltésű, de 207-szer nagyobb tömegű részecskével, a müonnal helyettesítjük. Mekkora a müonhidrogén a' sugara? Felhasználhatjuk, hogy a proton tömege mind az elektron, mind a müon tömegénél sokkal nagyobb.

(c) A Föld átlaghőmérséklete $T = 287$ K. Mekkora lenne az új T' átlaghőmérséklet, ha a Nap és a Föld átlagos távolsága 1%-kal lecsökkenne?

(d) Egy napon a levegő száraz, és a sűrűsége $\varrho = 1,2500$ kg/m^3. Másnapra megnő a levegő páratartalma, 2 tömegszázalék vízgőzt tartalmaz. A hőmérséklet és a nyomás nem változott. Mekkora lett a levegő ϱ' sűrűsége? (A száraz levegő átlagos moláris tömege 28,8 g/mol, a víz moláris tömege 18 g/mol. Feltételezhetjük, hogy ideális gázokról van szó.)

(e) Egy bizonyos helikopter akkor tud lebegni, ha a motorja P mechanikai teljesítményt ad le. Egy másik helikopter ennek pontosan $\frac{1}{2}$-ére kicsinyített mása (minden lineáris mérete fele akkora). Mekkora P' mechanikai teljesítmény szükséges ahhoz, hogy ez a helikopter lebegjen?

Versenyen kívüli pótfeladat: Egy űrhajós űrruhába öltözve a Földön $v_0 = 1$ m/s sebességgel tud a „legkényelmesebben" sétálni. Mekkora lesz a legkényelmesebb sétálás sebessége a Holdon, ahol a nehézségi gyorsulás a földi érték $\frac{1}{6}$-a?

Megoldás. *(a)* Legyen az eredeti rugó hossza l, rugóállandója pedig D. A rugó végére helyezett m tömegű test rezgési frekvenciája

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}.$$

A rugóállandó a rugóban ébredő F erő és a Δx megnyúlás hányadosa: $D = F/\Delta x$. A rugó középpontja ugyanekkora F erő hatására csak $\Delta x/2$ távolsággal mozdul el, a fele hosszúságú rugóra tehát $D' = F/(\Delta x/2) = 2D$. Eszerint a megrövidített rugó végén rezgő test frekvenciája:

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2D}{m}} = \sqrt{2}\,f.$$

(b) A Bohr-modell szerint az $mvr = \hbar$ kvantumfeltétel és az $mv^2/r = ke^2/r^2$ mozgásegyenlet együtt meghatározza az atommag körül keringő m tömegű részecske és az alapállapoti r pályasugár közötti kapcsolatot:

$$r = \frac{\hbar^2}{ke^2m} \propto \frac{1}{m}.$$

Megjegyzés: Ugyanehhez az eredményhez a de Broglie-féle anyaghullámokra és a Heisenberg-féle határozatlansági relációra hivatkozva is eljuthatunk. Egy r sugarú atomban az m tömegű (könnyű) részecske nagyságrendileg $v = \hbar/(mr)$ sebességgel, tehát $\hbar^2/(2mr^2)$ mozgási energiával, továbbá $-ke^2/r$ helyzeti energiával rendelkezik. A helyzeti és a mozgási energia összege $1/r$ kvadratikus függvénye, melynek minimuma: $1/r_{\min} \propto m$.

Eszerint a müonhidrogén sugara: $a_{\text{müon}} = a_0/207 = 0,256$ pm.

(c) Ha a Nap teljesítményét P-vel, a Föld pályasugarát R-rel jelöljük, akkor a T átlaghőmérsékletet megadó (a beérkező és a kimenő sugárzási teljesítmények egyensúlyát kifejező) egyenlet:

$$(1-r)\frac{P}{4\pi R^2} \cdot R_F^2\pi = 4\pi R_F^2 \varepsilon\sigma T^4.$$

A képletben r a Föld fényvisszaverő képessége (ún. albedója), R_F a Föld sugara, ε az emissziós együttható, σ pedig a Stefan–Boltzmann-állandó. (Az emisszióképesség a hőmérséklettől is függ, de kis változásoknál ezt elhanyagolhatjuk.) A fenti összefüggés szerint $T \propto \sqrt{1/R}$, az R pályasugár 1%-os csökkenése tehát a T hőmérséklet $0,5$%-os emelkedéséhez vezet: $T' = 288,4$ K.

(d) N molekulát tartalmazó ideális gáz állapotegyenlete: $pV = NkT$. Ha két gázmennyiség térfogata, nyomása és hőmérséklete rendre megegyezik, akkor azonos számú molekulát tartalmaznak, sűrűségük tehát arányos kell legyen az átlagos móltömeggel.

Bizonyos térfogatú, M tömegű száraz levegőben

$$N_{\text{száraz}} \propto \frac{M}{28,8}$$

darab molekula, ugyanekkora térfogatú, M' tömegű nedves levegőben pedig

$$N_{\text{nedves}} \propto 0,02\frac{M'}{18,0} + 0,98\frac{M'}{28,8}$$

molekula található. Mivel $N_{\text{száraz}} = N_{\text{nedves}}$, a sűrűségek aránya

$$\frac{\varrho_{\text{nedves}}}{\varrho_{\text{száraz}}} = \frac{M'}{M} = \frac{1}{28,8\left(\frac{0,02}{18} + \frac{0,98}{28,8}\right)} = 0,9881,$$

a nedves levegő sűrűsége pedig $\varrho' = \varrho_{\text{nedves}} = 0,9925\varrho_{\text{száraz}} = 1,2352\ \text{kg/m}^3$.

(e) Ezt a feladatot múlt havi számunkban (FF. 3088. számmal) a pontversenyben is kitűztük, megoldását később közöljük.

Versenyen kívüli pótfeladat: A feladat lényege a „legkényelmesebb sétálás” kifejezés értelmezése. Feltételezzük, hogy a legkényelmesebb (leginkább energia-takarékos) sétálásnál a lábainkat éppen csak megemeljük, de nem fejtünk ki rájuk forgatónyomatékot. Ilyenkor a lábak fizikai ingaként lengenek, periódusidejük $T \propto \sqrt{l/g}$, a lépések frekvenciája és ezzel együtt a sétálás sebessége tehát $\sqrt{g}$-vel arányos. (A lépések hossza a láb méretétől függ, emiatt természetes az a feltevés, hogy a Holdon is ugyanakkorákat lépünk, mint a Földön.) A kérdéses sebesség: $v' = v/\sqrt{6} \approx 0,4$ m/s.

2. feladat. *Atommagtömegek és stabilitás.* Valamennyi energiát MeV-ben, millió elektronvoltban fejeztük ki. $1\ \text{MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13}$ J, de ezt nem kell tudni a feladat megoldásához.

1. ábra. Egy nukleonra jutó kötési energia

Egy Z rendszámú (protonszámú) és N neutronszámú ($A = N + Z$) atommag M tömegét úgy kapjuk meg, hogy a magot alkotó szabad összetevők (protonok és neutronok) tömegének összegéből kivonjuk a c^2-tel osztott B kötési energiát (B/c^2-et): $Mc^2 = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - B$. Az alábbi grafikon B/A egy adott A értékhez tartozó maximális értékét adja meg A függvényében. Minél nagyobb B/A értéke, általában annál stabilabb a mag.

(a) Egy bizonyos A_α tömegszám felett a nukleonok kötési energiája elég kicsi ahhoz, hogy a mag kibocsáthasson egy α-részecskét ($A = 4$). Lineáris közelítést alkalmazva az $A = 100$-nál nagyobb tömegszámú atomokra, becsüld meg

az *1. ábra* alapján A_α értékét!

Ebben a közelítésben tételezd fel a következőket:

•Az α-bomlás kiinduló és keletkező magja is rajta van a megadott görbén.

•Az α-részecske teljes kötési energiája: $B_4 = 25,0$ MeV. (Ezt nem tudod a grafikonból kiolvasni!)

(b) Egy Z protont és N neutront ($A = N + Z$) tartalmazó atommag kötési energiáját a következő félempirikus képlet adja meg:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} - \delta,$$

ahol δ értéke:

$+a_p A^{-3/4}$ páratlan N – páratlan Z magokra,

0 páratlan N – páros Z és páros N – páratlan Z magokra,

$-a_p A^{-3/4}$ páros N – páros Z magokra.

Az együtthatók értéke: $a_v = 15,8$ MeV; $a_s = 16,8$ MeV; $a_c = 0,72$ MeV; $a_a = 23,5$ MeV; $a_p = 33,5$ MeV.

(i) Vezesd le azt az összefüggést, amely adott A tömegszám esetében megadja a legnagyobb kötési energiához tartozó $Z_{\max}$ protonszámot (rendszámot)! Csak ebben az alkérdésben a δ-tagot figyelmen kívül hagyhatod.

(ii) Az $A = 200$ tömegszámú magok közül melyik Z-hez tartozik a legnagyobb B/A? Ebben az esetben vedd figyelembe a δ-tagot is!

(iii) Tekintsük az alábbi táblázatban szereplő három, $A = 128$ tömegszámú atommagot. Határozd meg, hogy közülük melyek az energetikailag stabilak, és melyek rendelkeznek elegendő energiával ahhoz, hogy az alább felsorolt bomlások valamelyikével elbomolhatnak! Határozd meg az (i) pontban definiált $Z_{\max}$-ot, és töltsd ki a válaszlapon található táblázatot!

Mag/Folyamat	β^--bomlás	β^+-bomlás	elektronbefogás	$\beta^-\beta^-$-bomlás
$^{128}_{53}$I				
$^{128}_{54}$Xe				
$^{128}_{55}$Cs				

Jelölés: $^A_Z X$ X = kémiai vegyjel

A táblázat kitöltésekor kérjük:

•az energetikailag *megengedett* folyamatokat jelöld így: V,

•az energetikailag *tiltott* folyamatokat jelöld így: 0,

•*csak* a táblázatban szereplő három mag közötti átmenetekkel foglalkozz!

Bomlási folyamatok:

(1) β^--bomlás: a mag egy elektront bocsát ki,

(2) β^+-bomlás: a mag egy pozitront bocsát ki,

(3) $\beta^-\beta^-$-bomlás: a mag egyidejűleg két elektront bocsát ki,

(4) elektronbefogás: a mag az elektronhéjból fog be egy elektront.

Az elektron (és a pozitron) nyugalmi energiája $m_e c^2 = 0,51$ MeV, a protoné $m_p c^2 = 938,27$ MeV, a neutroné pedig $m_n c^2 = 939,57$ MeV.

Megoldás. *(a)* Az alfa-bomlás során $A \to (A-4) + \alpha(A=4)$. Ebből adódóan a bomlás energetikai feltétele: $m_A - m_{A-4} - m_4 > 0$. A nukleonok száma és fajtája bomlás közben állandó marad, ezért csak a kötési energiát kell vizsgálnunk: $-B_A + B_{A-4} + B_4 > 0$. Ha B/A-t a lineáris közelítésnek megfelelően $B/A = a + bA$ alakban írjuk, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$-A(a+bA) + (A-4)(a + b(A-4)) + B_4 > 0,$$
$$-8bA - 4a + 16b + B_4 > 0.$$

Az *1. ábra* alapján $A = 100$-nál nagyobb tömegszámú atomokra jó a lineáris közelítés:

$$B/A = (9,6 - 0,0080A) \text{ MeV}, \quad \text{azaz} \quad a = 9,6 \text{ MeV és } b = -0,0080 \text{ MeV}.$$

Ebből a bomlás feltétele: $0,064A - 38,4 - 0,1 + 25,0 > 0$, azaz $A > 211$.

(b) (i) Mivel A értéke rögzített, csak a Z-től függő utolsó előtti két tagot kell figyelembe vennünk. $Z_{\max}$ kifejezését deriválással kaphatjuk meg:

$$\frac{dB}{dZ} = -2Za_c A^{-1/3} - \frac{a_a}{A}(-4A + 8Z),$$

$$Z_{\max} = \frac{4a_a}{2a_c A^{-1/3} + \frac{8a_a}{A}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_c A^{2/3}}{4a_a}}.$$

(ii) $a = 200$ esetében az (i) pontban levezetett képletből $Z_{\max} = 79,25$. De most figyelembe kell vennünk az utolsó tagot is. Így a derivált kifejezése:

$$\frac{dB}{dZ} = -2Za_c A^{-1/3} - \frac{a_a}{A}(-4A + 8Z) \pm 2a_p A^{-3/4}.$$

Az utolsó tag akkor pozitív, ha Z értékének $+1$-gyel való megváltoztatása a magot páratlan–páratlan magból páros–páros maggá alakítja, ellenkező esetben negatív.

Hogyan kezelhetjük ezt a tagot?

$Z_{\max}$ értéke egész szám kell legyen, és mivel a páros számok előnyösebbek, $Z_{\max} = 80$-at tippelhetünk. Ellenőrzésképp kiszámíthatjuk az utolsó három tag nagyságát néhány közeli Z értékre:

77	78	79	80	81	82	83
979,241	975,915	976,295	975,342	978,093	979,512	984,637

Ez megerősíti, hogy $Z_{\max} = 80$. (Ez egy páros–páros mag.)

(iii) Tekintsük a kötési energiát megadó képletben csak az utolsó három tagot! A többi állandó, ha A értéke állandó. Nevezzük ezek összegét X-nek. Ahhoz, hogy eldöntsük egy magról, hogy stabil-e, meg kell határoznunk a szomszédos magok X értékeinek különbségét, és ezt össze kell hasonlítanunk az egyes lehetséges bomlások energiaigényével.

(1) β^--bomlás: $n \to p + e^-$, $\Delta X > -1,30 + 0,51 = -0,79$ MeV szükséges,

(2) β^+-bomlás: $p \to n + e^+$, $\Delta X > 1,30 + 0,51 = 1,81$ MeV szükséges,

(3) $\beta^-\beta^-$-bomlás: $2n \to 2p + 2e^-$, $\Delta X > 2(-1,30 + 0,51) = -1,58$ MeV szükséges,

(4) elektronbefogás: $e^- + p \to n$, $\Delta X > 1,30 - 0,51 = 0,79$ MeV szükséges.

Mag	X (MeV)
$^{128}_{53}\mathrm{I}$	$491,06$
$^{128}_{54}\mathrm{Xe}$	$489,16$
$^{128}_{55}\mathrm{Cs}$	$492,54$

Ennek alapján a táblázat helyes kitöltése:

Mag/Folyamat	β^--bomlás	β^+-bomlás	elektronbefogás	$\beta^-\beta^-$-bomlás
$^{128}_{53}\mathrm{I}$	V	0	0	V
$^{128}_{54}\mathrm{Xe}$	0	0	0	0
$^{128}_{55}\mathrm{Cs}$	0	V	V	0

3. feladat. *Napenergiával hajtott repülőgép.* Olyan repülőgépet tervezünk, amely kizárólag napenergia felhasználásával repül. Az a legcélszerűbb elrendezés, ha a szárnyak felső felületét teljesen beborítják a napelemek. A napelemek által termelt elektromos energia hajtja a légcsavarokat.

2. ábra. A repülőgép felülnézeti képe (a hozzá rögzített koordináta-rendszerben)

Legyen a szárny téglalap alakú, fesztávolsága l, szélessége c, területe $S = cl$, aránytényezője (aspect ratio) $A = l/c$. A szárny működését a következő modellel írhatjuk le: egy x magasságú és l szélességű levegőréteg a szárnyon egy kis ε szöggel lefelé eltérül, miközben a sebességének nagysága alig változik. A szárnyon lévő szabályozólemezekkel be lehet állítani a repüléshez optimális ε szöget. Ez az egyszerű modell akkor felel meg legjobban a valóságnak, ha $x = \pi \cdot l/4$; a továbbiakban ezt az értéket használjuk. A repülőgép teljes tömege M, a sebessége pedig a környező levegőhöz képest v. A számításokban csak a szárny körüli légáramlást vegyed figyelembe! A légcsavar által okozott légáramlásváltozást hanyagold el!

3. ábra. A szárny oldalnézetben (a repülőgéphez rögzített koordináta-rendszerben)

(a) Tegyük föl, hogy a szárnyat elhagyó levegőnek úgy változik meg az impulzusa, hogy a sebességének nagysága *nem* változik. Vezesd le azokat az összefüggéseket, melyek megadják az L függőleges emelőerőt (lift force) és a vízszintes D_1 fékezőerőt (drag force) a szárny méreteinek, valamint v, ε és a levegő ϱ sűrűségének függvényében![1] Feltételezheted,

[1]A feladat szövegében és a megoldásban megtartottuk az angol elnevezésekre utaló eredeti jelöléseket. Ezek eltérnek a nálunk szokásos

hogy a levegő áramlásának iránya mindig párhuzamos az oldalnézeti rajz síkjával.

(b) A szárnyfelület mentén mozgó levegő súrlódása egy további D_2 vízszintes fékezőerőt eredményez. A levegő egy kicsit lelassul, nagysága Δv értékkel csökken ($\Delta v \ll v/100$). A relatív sebességváltozást a

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

összefüggés adja meg, ahol f egy ε-tól független állandó.

Jelöljük v_0-lal azt a sebességet, mellyel minimális teljesítménnyel lehet állandó magasságban állandó sebességgel repülni! Add meg v_0-t M, f, A, S, ϱ és a g nehézségi gyorsulás függvényében! Hanyagold el az ε^2-nél és Δv-nél kisebb tagokat!

Hasznos lehet a következő (kis szögekre érvényes) közelítés: $1 - \cos\varepsilon \approx \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon$.

(c) ábrázold ***vázlatosan*** a repüléshez szükséges P teljesítményt a v sebesség függvényében! Rajzold be az ábrába azt is, hogy a kétféle fékezőerőből származó teljesítményjárulék külön-külön hogyan függ v-től! Add meg egy képlettel a $P_{\min}$ minimális teljesítményt M, f, A, S, ϱ és g függvényében!

(d) Tegyük föl, hogy a napelemek annyi energiát termelnek, hogy a légcsavar mechanikai teljesítménye egységnyi szárnyfelületre vonatkoztatva $I = 10$ W/m^2. Számítsd ki hogy ilyen teljesítmény mellett mekkora a maximális szárnyterhelés Mg/S (N/m^2-ben), és mekkora az ehhez tartozó v_0 sebesség!

Adatok: $\varrho = 1,25$ kg/m^3, $f = 0,004$, $A = 10$.

Megoldás. *(a)* Az egységnyi idő alatt átáramló tömeget nevezzük el „tömegáramnak”! Egy $\frac{dm}{dt}$ tömegáramú közeg sebességének $\Delta\mathbf{v}$-vel való megváltoztatásához szükséges erő: $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{v}\frac{dm}{dt}$. Jelen esetben a tömegáram:

$$\frac{dm}{dt} = xl\varrho v = \frac{\pi}{4} l^2 \varrho v.$$

A $\Delta\mathbf{v}$ vektor függőleges komponense: $\Delta v_V = v\sin\varepsilon$, vízszintes komponense: $\Delta v_H = v(1-\cos\varepsilon)$.

Ezek alapján felírhatjuk az L függőleges emelőerőt és a vízszintes D_1 fékezőerőt:

$$L = \frac{\pi}{4}\varrho v^2 l^2 \sin\varepsilon, \qquad D_1 = \frac{\pi}{4}\varrho v^2 l^2 (1-\cos\varepsilon).$$

(b) A repülőgép vízszintes repüléséhez szükséges teljesítmény: $P = Dv = (D_1 + D_2)v$. A vízszintes D_2 fékezőerőt a szárny mellett elhaladó levegő súrlódásából származó impulzus változásából írhatjuk fel:

$$D_2 = v_1 \frac{dm_1}{dt} - v_2 \frac{dm_2}{dt}.$$

Az anyagmegmaradást kifejező (kontinuitási) egyenlet alapján:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt} = xl\varrho v.$$

Behelyettesítve, hogy $v_1 = v$ és $v_2 = v - \Delta v$, kapjuk:

$$D_2 = vxl\varrho v - (v-\Delta v)xl\varrho v = xl\varrho v^2 - xl\varrho v^2 + v\Delta v xl\varrho = xl\varrho v\Delta v = \frac{\pi l}{4} l\varrho v\Delta v = \frac{\pi f}{4A}\varrho v^2 l^2.$$

Ebben a közelítésben D kifejezhető a tömeg, a sebesség és a szárnyméretek segítségével. Ne felejtsük el, hogy vízszintes repüléskor az emelőerő egyenlő a gép súlyával!

$$L = Mg = \frac{\pi}{4}\varrho v^2 l^2 \sin\varepsilon, \qquad \sin\varepsilon = \frac{4Mg}{\pi\varrho v^2 l^2}.$$

Ezután már minimalizálhatjuk a teljesítményt akár v, akár ε szerint. Itt most v-t választjuk:

$$P = Dv = \frac{\pi}{4}\varrho v^3 l^2 \left(\frac{f}{A} + \frac{1}{2}\frac{(4Mg)^2}{\left(\pi\varrho v^2 l^2\right)^2}\right) = \frac{\pi}{4}\varrho v^3 l^2 \frac{f}{A} + \frac{2(Mg)^2}{\pi\varrho v l^2},$$

$$\frac{dP}{dv} = \frac{3\pi}{4}\varrho v^2 l^2 \frac{f}{A} - \frac{2(Mg)^2}{\pi\varrho v^2 l^2} = 0.$$

A minimális teljesítményhez tartozó v_0 repülési sebességre fennáll:

$$v_0^4 = \frac{8(Mg)^2 A}{3\pi^2\varrho^2 l^4 f} = \frac{8}{3Af}\left(\frac{Mg}{\pi\varrho S}\right)^2.$$

jelölésektől, de mivel az olimpián a rendezők elvárják az általuk megadott jelölések használatát, a leendő versenyzők felkészülésének „megkönnyítése” érdekében nem „fordítottuk le” a betűjeleket.

(c)

4. ábra. A teljesítmény a sebesség függvényében

$$P_{\min} = \frac{\pi}{4}\varrho v_0^3 l^2 \left(\frac{f}{A} + \frac{1}{2}\frac{(4Mg)^2}{\left(\pi\varrho v_0^2 l^2\right)^2} \right) = \frac{\pi}{4}\varrho v_0^3 l^2 \left(\frac{f}{A} + \frac{(4Mg)^2}{2(\pi\varrho l^2)^2}\frac{3\pi^2\varrho^2 l^4 f}{8(Mg)^2 A} \right) =$$

$$= \pi\varrho v_0^3 l^2 \frac{f}{A} = \pi\varrho v_0^3 S f.$$

Behelyettesítve v_0 értékét:

$$P_{\min} = \pi\varrho S f \frac{8^{3/4}(Mg)^{3/2}}{(3Af)^{3/4}(\pi\varrho S)^{3/2}} = \left(\frac{8}{3A}\right)^{3/4} f^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{(\pi\varrho S)^{1/2}}.$$

(d) A fenti kifejezést egyenlővé téve a rendelkezésre álló IS teljesítménnyel,

$$\left(\frac{Mg}{S}\right)^{3/2} = I\left(\frac{3A}{8}\right)^{3/4} \frac{(\pi\varrho)^{1/2}}{f^{1/4}}, \qquad \text{vagyis}$$

$$\frac{Mg}{S} = I^{2/3}\left(\frac{3A}{8}\right)^{1/2} \frac{(\pi\varrho)^{1/3}}{f^{1/6}},$$

számszerűen pedig $Mg/S = 35,6\ \mathrm{N/m^2}$, $v_0 = 8,60$ m/s adódik.

Kísérleti verseny

A kísérleti fordulóban egy érdekes és különleges eszközzel, a „bimorph"-fal végeztek a versenyzők különböző méréseket. A bimorph két vékony piezoelektromos rétegből áll, melyeket egymáshoz ragasztottak. (A piezoelektromos anyagok elektromos térben megváltoztatják méretüket, mechanikai feszültség hatására pedig elektromos potenciálkülönbség alakul ki bennük. Elektromos térben a relatív hosszváltozás első közelítésben arányos a térerősséggel.

A hosszváltozásnak azonban hiszterézise van, ami annyit jelent, hogy ha a rákapcsolt teret nullára csökkentjük, a méretek nem állnak vissza az eredeti értékekre. Az eredeti méret csak egy kis ellenirányú térrel érhető el újra.) Az így kialakított 38 mm hosszú, kb. $2 - 3$ mm széles, 0,8 mm vastag kettősrétegben a két külső felületre gőzölögtetett kontaktusok segítségével elektromos tér hozható létre. A rétegeket úgy választották, hogy a külső felületre merőleges elektromos tér hatására az egyik hosszirányba kitágul, a másik réteg pedig összehúzódik. Ellentétes irányú térben a rétegek alakváltozása is fordított lesz: ami korábban összehúzódott, az kitágul, a másik pedig összehúzódik. Feltételezhető, hogy az elektromos tér hatására a bimorph körív alakúra görbül meg. A bimorph végére egy kicsiny tükröt

ragasztottak. A tükörről visszaverődő lézersugár segítségével a bimorph néhány μm-es elmozdulását is mérni lehetett.
Feladatok:

1. Határozd meg, hogyan függ a bimorph szabad végének elmozdulása a rákapcsolt feszültségtől, $+36$ V-tól lefelé -36 V-ig és utána vissza, felfelé $+36$ V-ig! A mérések során a feszültséget csak a megjelölt irányba változtasd! (Például ha -36 V-tól $+36$ V-ig mérsz, mindig növeld a feszültséget, sohase csökkentsd azt. Ha egy mérési pontot kihagysz, ne térj vissza rá!) ábrázold a mért függvénykapcsolatot milliméterpapíron!

Egy ciklus alatt ($+36$ V-tól le -36 V-ig és vissza $+36$ V-ig változó feszültségnél) bizonyos energia disszipálódik a bimorph-ban. Adj meg és számolj ki egy olyan mennyiséget, amely ezzel az energiaveszteséggel arányos!

2. Egy adott bimorph-nál – ha a hiszterézist elhanyagoljuk – a bimorph szabad végének elmozdulását a $d = AV^m l^n$, ahol V az alkalmazott elektromos feszültség, l a bimorph szabad részének a hossza (a csipesszel érintkező legszélső ponttól mérve), továbbá m, n és A konstansok. Megfelelő mérésekkel és számításokkal határozd meg az m, n és A állandók számértékét!

3. Mérd meg a bimorph kapacitását!

Rendelkezésre álló eszközök:

• Egy $L = (38 \pm 1)$ mm hosszú bimorph. A bimorph egyik végéhez egy kis tükröt erősítettek. A bimorph-ot egy ruhacsipesz tartóba fogták, kontaktusokkal és vezetékekkel látták el. A bimorph szabad részének l hosszát úgy tudod megváltoztatni, hogy a csipeszben elmozdítod. Légy óvatos, mert a bimorph nagyon kényes!

• Egy lézer mutató (egy körétekert gumikarikával, melynek segítségével a lézert a mérés idején folyamatosan bekapcsolva tarthatod).

• Fekete gyurma a csipesz és a lézer asztalon való rögzítéséhez.

• Egy ernyő (használd milliméterpapírt, melyet az asztalok közötti térelválasztóra rögzíthetsz).

• Egy multiméter vezetékekkel. (Egyenfeszültség méréséhez a multiméter kapcsolóját fordítsd el úgy, hogy a kis kör DCV terület 200-as értékére mutasson. A voltmérő bemenő ellenállása 1 MΩ, a mérési pontosság $\pm 0,1$ V).

• Egy $2,5$ MΩ-os változtatható ellenállás (potméter), a bimorph feszültségének szabályozására, három kivezetéssel. A piros vezeték a potméter középső (csúszó) kivezetése.

• Négy darab 9 V-os telepből álló egység (*Megjegyzés:* A feszültségforrás belső ellenállását egy 5 kΩ-os ellenállással megnövelték, melyet az egyik vezetékbe kötöttek be. Ez korlátozza az áramot és védi az áramkört. NE zárd rövidre és ne kapcsold ki ezt az ellenállást!)

• Egy $(1,00 \pm 0,05)$ GΩ-os ellenállás. (*Figyelem!* Az ellenállás értékét megváltoztathatja a bőrödről rárakódó szennyeződés, ezért ne érj hozzá az ellenállás testéhez, csak a fém kivezetésekhez!)

• Stopperóra.

• Vonalzó.

• Ragasztószalag.

Részfeladatok:

1.1. Rajzold le annak az áramkörnek a vázlatát, melyet a bimorph szabad végének elmozdulása és a feszültség közti kapcsolat mérésénél használtál!

1.2. Vázlatosan ábrázold a mérés geometriai elrendezését, és jelöld be az általad használt összes mennyiséget!

1.3. Add meg azt az összefüggést, amely kapcsolatot teremt a bimorph szabad végének elmozdulása és a mért mennyiségek között!

1.4. ábrázold milliméterpapíron a bimorph szabad végének elmozdulását a feszültség függvényében! Jelöld be, mely pontok felelnek meg a növekvő és melyek a csökkenő feszültségnek! Ne felejtsd el a tengelyeken feltüntetni a léptéket és a mértékegységeket!

1.5. Add meg, hogy melyik mennyiség az, amely arányos a bimorph által elnyelt energiával!

1.6. Írd le a bimorph által disszipált energiával arányos mennyiség számértékét, mérési hibával és mértékegységgel együtt!

2.1. Add meg m számértékét! Add meg, milyen adattáblázatokat, grafikonokat és számításokat használtál ehhez!

2.2. Add meg n számértékét, mérési hibával együtt! Add meg, milyen adattáblázatokat, grafikonokat és számításokat használtál ehhez!

2.3. Add meg az A konstans számértékét, mérési hibával és mértékegységgel együtt!

3.1. Rajzold le a bimorph kapacitásának mérésénél használt áramkör vázlatát!

3.2. Add meg, hogy milyen mennyiségeket mértél és milyen összefüggést használtál a bimorph kapacitásának meghatározásánál! Add meg, milyen adattáblázatokat, grafikonokat és számításokat használtál ehhez!

3.3. Add meg a kapacitás számértékét, mérési hibával és mértékegységgel együtt!

Megoldás. A feladat megoldása elsősorban nem elméleti, hanem gyakorlati nehézségeket okozott. Az eszközöket egy fekete, gyurmaszerű anyaggal kellett az asztalhoz rögzíteni, és a mérés pontossága szempontjából egyáltalán nem volt mindegy, hogy ebből a nyúlós anyagból ki mennyit és hol használt. (μm pontossággal kellett mérni!)

Természetesen a pontatlan, nagy hibákat tartalmazó mérési eredményeket sokkal nehezebb feldolgozni. (Milyen rossz, ha valaki elvi megfontolásokból tudja, hogy minek kellene kijönni, és mégis egészen más eredményt kap!)

A legnagyobb ötlet a 3. kérdés megválaszolásához kellett. A bimorph kapacitása kb. 5 nF – elég kicsi érték. Ha a 36 V feszültségre feltöltött bimorph-ot az 1 MΩ ellenállású feszültségmérőn keresztül sütjük ki, az időállandó olyan rövid, hogy stopperórával nem mérhető. A megoldás az, hogy a bimorph-ot a rendelkezésre álló 1 GΩ-os ellenálláson keresztül sütjük ki, és a bimorph feszültségét közvetetten, az első feladathoz hasonlóan, optikai úton mérjük, és a feszültségmérőt nem is használjuk.

Gnädig Péter – Vankó Péter