

A KöMal 1997/3. száma **FGy. 3003.** gyakorlatának harmadik kérdésére adott válaszba elvi hiba csúszott. A feladat egyik célja éppen az volt, hogy tisztázzon bizonyos összefüggéseket, amely összefüggések a megoldásban elsikkadtak. (A dolgozatok pontozását az alábbiak nem módosítják. – A szerk.) A feladat így hangzott:

Utasaival együtt 1500 kg tömegű autó kapaszkodik fel a 180 méter hosszú, 10 méter magas emelkedőn, egyenletes 54 km/h sebességgel. Motorjának teljesítménye 25 kW. Mekkora erő tolja fel a kocsit az emelkedőn? Mi fejtí ki ezt az erőt? Mekkora a munkavégzés hatásfoka?

A megoldás első része meghatározza a motor által végzett összes munkát: $W_{\text{ö}} = P \cdot t = 300 \text{ kJ}$, majd ezt összehasonlítja a helyzeti energia $W_{\text{h}} = mgh = 150 \text{ kJ}$ növekedésével, és megkapja az $h = W_{\text{h}}/W_{\text{ö}} = 0,5 = 50\%$ hatásfokot.

Az elvi hiba a következő mondat vastagon szedett részében rejlik: „**A gépkocsit felfelé toló erő s = 180 m hosszú úton $W_{\text{ö}} = 300 \text{ kJ}$ munkát végez**, az erő nagysága tehát $F = W_{\text{ö}}/s \approx 1670 \text{ N}$. Ezt az erőt a talaj és a kerekek közötti tapadási súrlódás fejtí ki.”

Az idézett második mondat helyesen állapítja meg, hogy a gépkocsit a tapadási súrlódási erő viszi fel az emelkedőn, azonban az az állítás hamis, hogy ez az erő végezne munkát 180 m hosszú úton. A talajhoz tapadó kerék talajjal érintkező pontja ui. pillanatnyi nyugalomban van a talajhoz képest, tehát a munka kifejezésében az elmozdulás, és így a munka is 0.

Az ellentmondás azonnal kitűnik a munkatétel alkalmazása során is. „**A testre ható összes (külső és belső) erők munkájának összege egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával.**” Márpedig ha a gépkocsi motorja elvégzi a 300 kJ munkát, akkor a talaj által a megoldásban feltételezett 300 kJ munkával együtt már 600 kJ lenne a munkavégzés, ami ellentmond minden korábbi számításnak.

Hogy tisztábban lássunk, tekintsünk egy álló helyzetből induló gépkocsit, amely v sebességre gyorsul fel. A gépkocsit valóban a tapadási súrlódási erő gyorsítja, a kinetikus energia nyeresét pedig kizárólag a motor munkája fedezi. Tömören: az $m\vec{v}$ lendületet a *tapadási erő* adja (hiszen belső erő – motor – nem változtathatja meg a test lendületét), az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiát a *motor munkája* adja (hiszen a tapadási erő a talaj rendszerében nem végezhet munkát).

Így tehát a megoldásban nem használhatjuk ki a talaj által *nem* végzett munka nagyságát.

A megoldás helyes menete a következő lehet:

A kocsit egyenletesen mozog, tehát az összes munkák összege 0. Jelöljük a határfokot rontó összes ellenállást F_{ell} -lel. A munkatétel:

$$-F_{\text{ell}} \cdot s - m \cdot g \cdot h + P \cdot t = 0,$$

ahol az első tag a közegellenállás negatív munkája, a második a nehézségi erő negatív munkája, a harmadik tag a motor pozitív munkája. Innen az összes eredő ellenállási erő nagysága:

$$F_{\text{ell}} = \frac{P \cdot t - m \cdot g \cdot h}{s} = \frac{300 \text{ kJ} - 150 \text{ kJ}}{180 \text{ m}} = 833,33 \text{ N},$$

amit a kényszererő és nehézségi erő eredőjéhez adva megkapjuk a keresett, talaj által kifejtett erő nagyságát is:

$$F_{\text{tap}} = mg \frac{h}{s} + F_{\text{ell}} = 1500 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{10 \text{ m}}{180 \text{ m}} + 833,33 \text{ N} \approx 1670 \text{ N}.$$

A megoldás után közölt „1. Megjegyzés” értelmetlen: „A munkavégzés elsődlegesen a motornál, a dugattyúk elmozdulásánál történik, **s csak áttételeken keresztül adódik át a kocsikerekeinek.**” A mondat első részének állítása helyes, a többi nem: munkavégzés nem „adódik át” a kerekeknek, csak energia.

Megoldásukban hallgatólagosan talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszert használtunk. Oldjuk meg a feladatot *az autóhoz rögzített* vonatkoztatási rendszerben! (A feladat szerint ez is inerciarendszer.) Alkalmazzuk a munkatételt!

Mivel a kocsi nyugalomban van, sem a közegellenállás, sem a nehézségi erő nem végez munkát a kocsin, viszont ekkor a tapadási súrlódási erő végez munkát, mégpedig negatív munkát, hiszen a keréknek a talajjal érintkező pontja koordinátarendszerünkben most „hátrafelé” mozog, míg a kocsira ható tapadási erő „előre” mutató vektor, vagyis 180° -os szöget zárnak be egymással. A munkatétel szerint

$$W_{\text{motor}} + W_{\text{tap}} = 0,$$

mert a kinetikus energia nem változik meg. Részletezve:

$$P \cdot t - F_{\text{tap}} \cdot s = 0.$$

Innen a keresett tapadási súrlódási erő:

$$F_{\text{tap}} = \frac{P \cdot t}{s} = \frac{2500 \text{ W} \cdot 12 \text{ s}}{180 \text{ m}} \approx 1670 \text{ N}.$$

Tanulságos energetikailag is követni a folyamatot a kocsihoz rögzített koordináta-rendszerből leírva. Koordináta-rendszerünkben a kocsi kinetikus energiája nem változik annak ellenére, hogy a motor pozitív munkát végez ($P \cdot t = M \cdot \varphi$) a kocsin, azaz ennyivel növeli a kocsi energiáját. Ez a „rendezett úton átadott energia” (belülről) az autóba „áramlik”, majd (a kardántengely közvetítésével) a kerekeknél kiáramlik az autóból, annak a talajon végzett $W_{\text{tap}} = F_{\text{tap}} \cdot s$ munkavégzés útján, hiszen koordináta-rendszerünkben a meghajtott kerekek a talajon pozitív munkát végeznek ($F_{\text{tap}} \cdot s$).

Ez a munka kétféle energia közvetítését valósítja meg: 1. növeli az autó–Föld rendszerének gravitációs helyzeti energiáját $\Delta E_{\text{grav}} = mg \frac{h}{s} \cdot s = mgh$ értékkel (súlypontjaik távolodnak egymástól), és 2. sok szabadsági fokra szóródik szét $\Delta E_{\text{közeg}} = F_{\text{ell}} \cdot s$ értékkel (az autóhoz rögzített koordináta-rendszerben „fúj a szél”). Az erőegyensúly miatt ui.

$$F_{\text{tap}} = F_{\text{ell}} + mg \frac{h}{s},$$

$$\text{azaz } F_{\text{tap}} \cdot s = F_{\text{közeg}} \cdot s + mg \frac{h}{s} \cdot s = F_{\text{közeg}} \cdot s + mgh = P \cdot t = W_{\text{motor}},$$

valóban

$$W_{\text{motor}} = \Delta E_{\text{közeg}} + \Delta E_{\text{grav}}.$$

A hatásfok innen könnyen számítható. A „hasznos munka” a Földnek a kocsi alatt minél mélyebbre távolítása, az összes munka a motor mechanikai munkája, tehát a hatásfok:

$$\eta = \frac{mgh}{P \cdot t} = \frac{1500 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m}}{25\,000 \text{ W} \cdot 12 \text{ s}} = 0,5.$$

Holics László