

$$(1) \quad (x^2 + 1)^y - (x^2 - 1)^y = 2x^y$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a pozitív $(x^2 + 1)^y$ -nal, és csoportosítsuk át a tagokat:

$$(2) \quad \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^y + 2\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^y = 1.$$

Ha $x \geq 1$, a bal oldalon mindkét alap nem negatív és 1-nél kisebb, tehát a bal oldal értéke rögzített x mellett y monoton fogyó függvénye. Ha $y = 2$, a bal oldal értéke $(x^4 + 1)/(x^4 + 2x^2 + 1)$, ami mindig kisebb, mint 1, tehát csak $y = 1$ jöhet szóba. Ekkor (2) gyöke $x = 1$, tehát az egyetlen megoldás: $x = y = 1$.

Megjegyzés. Ha $x = 0$, és $y > 0$, (2) bal oldalán $(-1)^y$ áll, ami tetszőleges páros y mellett egyenlő 1-gyel. Ha $y = 0$ és $x > 0$, (2) bal oldalának értéke nem lehet 1. Ha $x = y = 0$, a második tag nincs értelmezve. Ha tehát a nullát is a természetes számok közé soroljuk, a megoldások köre az $x = 0$, y tetszőleges páros szám értékekkel bővül.