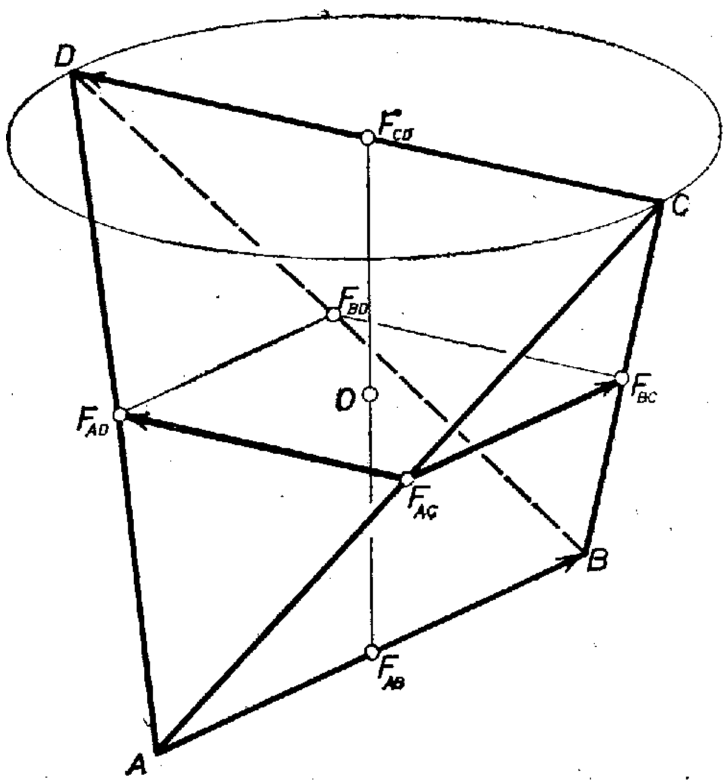
I. megoldás. a) Az I. o. tankönyvből ismert tétel szerint P_{12}-t P-ből egyszerűbben, egyetlen lépésben az $\overrightarrow{12}$ (olvasd: egy, kettő vektor) 2-szeresével való eltolás, transzláció állítja elő (mert általában az 12 szakasz a $P\ P_1P_{12}$ háromszög középvonala, de akkor is érvényes ez, ha P-t a 12 egyenesen választjuk).

Hasonlóan P_{1234}-et P_{12}-ből a $\overrightarrow{34}$ 2-szeresével való transzláció is megadja, így P_{1234}-et P-ből egyetlen lépésben megkapjuk az $\overrightarrow{12}+\overrightarrow{34}$ vektorösszeg 2-szeresével való eltolás révén.

b) Legyen a 4 tükrözési centrum egy tetszőleges permutációja A, B, C, D, és jellemezzük a P_{ABCD}-t P-ből előállító $t_{ABCD}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$ vektort (1. ábra).



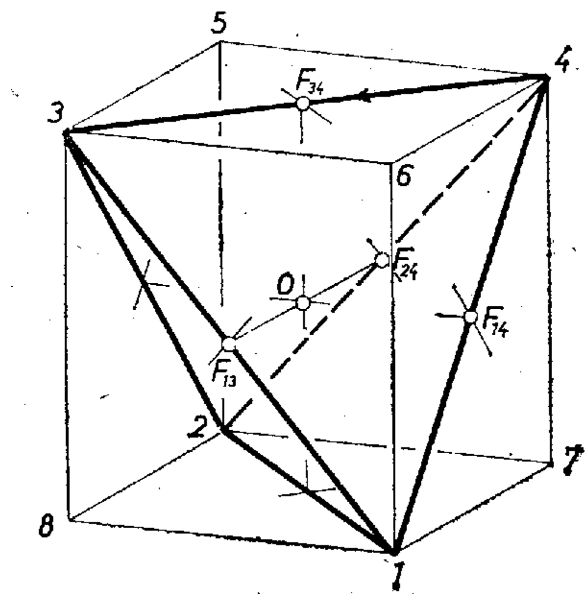
1. ábra

A két összetevő hossza mindig egyenlő, mert a szabályos tetraéder élei egyenlők, másrészt mindig merőlegesek egy másra, mert $CA=CB$ és $DA=DB$ miatt C és D benne vannak az AB él felező merőleges síkjában. Így a vektorparalelogramma négyzetté specializálódik és t abszolút értéke $2\sqrt{2}a$, ahol a a tetraéder élhossza. – Mivel az összeadás kommutatív, tüstént látjuk, hogy $t_{CDAB}=t_{ABCD}$.

A vektor irányára áttérve, azt is könnyű látni, hogy a D, C, B, A és a B, A, D, C centrum–sorrendek mellett a vektor nyilvánvalóan az előbbinek (-1)-szerese. Jelöljük az XY él felezőpontját F_{XY}-nal és fussa be X és Y az A, B, C, D betűket. Így $2\cdot\overrightarrow{AB}=4\cdot\overrightarrow{F_{AC}F_{BC}}$, $2\cdot\overrightarrow{CD}=4\cdot\overrightarrow{F_{AC}F_{AD}}$, és $t_{ABCD}=4\cdot\overrightarrow{F_{AC}F_{BD}}=8\cdot\overrightarrow{F_{AC}O}=8\cdot\overrightarrow{0F_{BD}}$, ahol O a tetraéder középpontja, egyben súlypontja, hiszen ez a 4 felezőpont egy paralelogramma (speciálisan négyzet) 4 csúcsa.

Ebből látjuk, hogy az eredő eltolási vektor 6 különböző értéket vehet fel: $8\cdot\overrightarrow{OF_XY}$, másrészt a sorrendben az A, C cserét, vagy a B, D cserét végezve, vagy mindkettőt, az eredmény ugyanaz. Az eredeti jelölés mellett pl. P_{1234}, P_{1432}, P_{3412} és P_{3214} azonosak.

II. megoldás. Tükrözzük T tetraéderünket az O középpontjára (amelyről az I. megoldás mintájára látható, hogy felezi a szemben levő élpárok felezőpontjait összekötő szakaszokat). Legyenek a T' kép csúcsai rendre 5, 6, 7, 8 (2. ábra).



2. ábra

Ez a 8 csúcs együtt egy kocka csúcsait adja. Bontsuk a $2\cdot\overrightarrow{12}$ és $2\cdot\overrightarrow{34}$ eltolási vektort kockaél–irányú összetevőkre, így

$$t_{1234}=2(\overrightarrow{12}+\overrightarrow{34})=2(\overrightarrow{18}+\overrightarrow{82}+\overrightarrow{36}+\overrightarrow{64})=4\cdot\overrightarrow{82},$$

hiszen $\overrightarrow{36}=-\overrightarrow{18}$ és $\overrightarrow{64}=\overrightarrow{82}$. Végül „szimmetrizáljuk” az eredményt, hogy egyrészt ne szerepeljen benne a 8-as segédcsúcs, másrészt ne vigyen benne szerepet a végpontként szereplő 2-es centrum: vegyük a $\overrightarrow{82}$ helyett a vele egyenlő és az O-n átmenő vektort:

$$t_{1234}=4\cdot\overrightarrow{F_{13}F_{24}}=8\cdot\overrightarrow{F_{13}O}=8\cdot\overrightarrow{OF_{24}},$$

az eltolás a kocka egyik irányított laptengelyének 4-szerese, másképpen a tetraéder egyik irányított éltengelyének 4-szerese, még másképpen: a T és T' közös részeként tekinthető szabályos oktaéder egyik irányított csúcstengelyének 4-szerese.

Innen látjuk, hogy a tükrözési sorrendben az 1 és 3, valamint a 2 és 4 centrumpárok egymástól független vagy együttes fölcserélése nem változtat az eredményen, és hogy a centrumok 24 permutációja 4-esével 6 különböző eredményét adja a tükrözési sorozatnak.

Megjegyzés. Tetszetősnek ígérkezik felhasználni ezt a tételt: egy alakzatot az $ABCD$ paralelogramma csúcsaira egymás után tükrözve, visszajut eredeti helyzetébe (hiszen $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$). Eszerint P_{123} azonos az E-re való P_E tükörképpel, ahol $123E$ paralelogramma, így már $\overrightarrow{PP_{E4}}=2\cdot\overrightarrow{E4}$. Az olvasóra hagyjuk az eredmény szimmetrizálását pl. az 13 él felező merőleges síkjában.

Vigassy Lajos Budapest