1. Legyen a húrtrapéz párhuzamos oldalainak hossza $2a$, illetve $2b$ $(a > b)$, a szárak hossza c, a magasságé m.

Ha a húrtrapéz egyben érintőtrapéz is, akkor $m = 2\varrho$, ahol ϱ a beírható kör sugara, és $c = a + b$. Így

$$4\varrho^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2, \qquad m = 2\varrho = \sqrt{2a \cdot 2b},$$

tehát igaz az állítás. Ha $a = b$, akkor triviális az állítás.

Ha a húrtrapézban $m^2 = 2a \cdot 2b$, akkor

$$c^2 = 2a \cdot 2b + (a-b)^2,$$

tehát

$$c = a + b,$$

azaz a trapéz érintőnégyszög, hiszen a szemközti oldalak összege ($2a + 2b$, illetve $2(a + b)$) megegyezik. Ha a trapéz téglalap (négyzet), akkor triviális az állítás.

2. Ha $x+y > 0$, akkor $(x+y)$-nal szorozva az első egyenletet $x^2 - y^2 - \sqrt{x^2-y^2} - 12 = 0$, ahonnan $\sqrt{x^2-y^2} = 4$, hiszen $\sqrt{x^2-y^2} \geq 0$. Így $x^2 - y^2 = 16$, és $xy = -15$. Helyettesítő módszerrel $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ vagy $x_2 = -5$, $y_2 = 3$ adódik. Az $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ számpár megoldás, a másik nem.

Ha $x + y < 0$, akkor $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2-y^2} - 12 = 0$, ahonnan $\sqrt{x^2-y^2} = 3$, így $x^2 - y^2 = 9$ és $xy = -15$, majd $x^4 - 9x^2 - 225 = 0$, $x^2 = \dfrac{1}{2}\left(9 + 3\sqrt{109}\right)$.

Az $x_3 = -\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(9 + 3\sqrt{109}\right)}$, $y_3 = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{109} - 9\right)}$ számpár megoldás,

az $x_4 = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(9 + 3\sqrt{109}\right)}$, $y_4 = -\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{109} - 9\right)}$ számpár nem.

3. Nyilván $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$, $ax > 0$, $ax \neq 1$, $a^2x > 0$ és $a^2x \neq 1$. Azonosságok alkalmával az egyenlőtlenség

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1 + \log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} > 0.$$

Legyen $\log_a x = z$. Azonos átalakításokkal a

$$\frac{6\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{4}{3}\right)}{z(z+1)(z+2)} > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldásai: $-2 < z < -\dfrac{4}{3}$ vagy $-1 < z < -\dfrac{1}{2}$ vagy $z > 0$. Így $-2 < \log_a x < -\dfrac{4}{3}$ vagy $-1 < \log_a x < -\dfrac{1}{2}$ vagy $\log_a x > 0$.

Ha $a > 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, tehát

$$\frac{1}{a^2} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{a} < x < \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad \text{vagy} \qquad x > 1,$$

ha $0 < a < 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, tehát

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} < x < \frac{1}{a^2} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{a} \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < 1.$$

4. Az első egyenlet diszkriminánsa $D_1 = p_1^2 - 4q_1$, a másodiké $D_2 = p_2^2 - 4q_2$.

A feltétel alkalmazásával

$$D_1 + D_2 = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0.$$

Mivel a diszkriminánsok összege nemnegatív, azért D_1 és D_2 közül legalább az egyik nemnegatív, így az egyenletek közül legalább az egyiknek van valós megoldása.

Rábai Imre