

Berkes Jenő tanár úr emlékére

1. Igazolja, hogy minden háromszögben

$$a(\sin \beta - \sin \gamma) + b(\sin \gamma - \sin \alpha) + c(\sin \alpha - \sin \beta) = 0.$$

2. Számítsa ki a $\cos \pi(x^2 - 2x + 1) + \cos \pi x^2 = 0$ egyenlet legkisebb pozitív gyökét és a legkisebb abszolút értékű negatív gyökét.

3. Oldja meg a

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x+2} + 3} + \sqrt{x - 2\sqrt{x+2} + 3} = a$$

egyenletet, ha $a = 1$, ha $a = 2$, ha $a = 4$ és ha $a = 2\sqrt{x+2}$.

4. Két éven (huszonnégy hónapon) át minden hónap elején 5000 forintot helyezünk el egy bankban havi 2%-os kamatra. A második év (huszonnegyedik hónap) végén először, majd ettől kezdve minden hónap végén ugyanakkora összeget veszünk ki úgy, hogy az utolsó részletet a harmadik év (harminchatodik hónap) végén vesszük ki, és ekkor már nem marad pénzünk a bankban. Mennyi pénzünk lesz a bankban a második év végén a kivétel előtt, és mennyi a kivétel után?

5. Legyenek a és b olyan valós számok, hogy $a < 2b$ és $ab = 1$. Bizonyítsa be, hogy $\frac{a^2 + 4b^2}{a - 2b} + 4 \leq 0$.

6. Adott a $P(1; 1)$ pont, valamint az $x + y = -1$ egyenletű e és a $8x + 3y = 7$ egyenletű f egyenesek. Írja fel annak a P ponton áthaladó egyenesnek az egyenletét, amelynek az e és f egyenesek közé eső szakaszát, az e egyenestől számítva a P pont $3 : 2$ arányban oszt.

7. Az $x^2 - px + q = 0$ egyenlet egyik gyökének háromszorosa gyöke az $x^2 + (p + 4)x - 3q = 0$ egyenletnek. Számítsa ki p és q értékét, ha $p^2 - 4q = 9$.

8. Az x , y és z valós számokra teljesülnek a következő feltételek: $x + y = 2z + 1$, $x^2 + y^2 = z^2 + 4z$. Mely z érték esetén lesz az xy szorzat értéke minimális, illetve maximális? Mennyi az xy szorzat minimális, illetve maximális értéke?