Az ABC háromszögben az $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 4$ arányok alapján γ derékszög, tegyük ennek alapján C-t a koordinátarendszer origójába és A-t az x tengely $(b,\ 0)$ pontjába $(b > 0)$. Ekkor B az y tengelyre jut, válasszuk helyzetének a $(0,\ a)$ pontot $(a > 0)$, végül legyen $AB = 1$, azaz $a^2 + b^2 = 1$.

A beírt kör sugara, mint ismeretes:

$$\varrho = \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(a + b - 1),$$

evvel K középpontja a $(\varrho,\ \varrho)$ pont; az S súlypont pedig $\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right)$. Ennélfogva S akkor esik rá a K körüli sugarú kör kerületére, ha

$$\left(\frac{b}{3} - \varrho\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \varrho\right)^2 = KS^2 = \varrho^2,$$

és ϱ kiküszöbölésével

$$16 - 3(a + b + 1)^2 = 0,$$

amiből

$$a + b = \frac{4}{\sqrt{3}} - 1. \tag{1}$$

Másrészt a feltételből $\alpha = 45°/2,\ \beta = 90° - \alpha$, és ismert összefüggések alapján

$$a + b = \sin\alpha + \sin(90° - \alpha) = 2\sin 45° \cos(45° - \alpha) = \sqrt{2}\cos 22{,}5° = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1 + \cos 45°}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) kifejezések nem lehetnek egyenlők. Ugyanis különbségüket az összegükkel szorozva, ami biztosan pozitív,

$$\frac{16}{3} - \left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

adódik, és ez nem 0, mert hasonlóan

$$\left[\frac{16}{3} - \left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \cdot \left[\frac{16}{3} + \left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{256}{9} - \left(\frac{131}{6} + \frac{16}{\sqrt{6}}\right) = \frac{119}{18} - \frac{16}{\sqrt{6}}$$

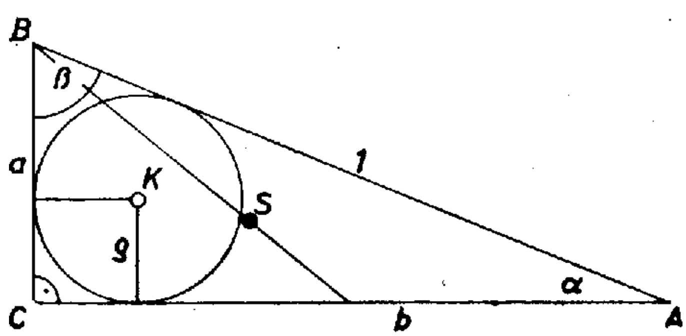
sem 0, különben ugyanis $\sqrt{6} = 16 \cdot 18/119$, racionális szám lenne.

Ezek szerint a szögek fenti aránya, és a beírt körnek a súlyponton való áthaladása ugyanazon derékszögű háromszögben nem teljesülhet, a kérdéses állítás nem igaz.

Megjegyzések. 1. Kérdezhetjük : mennyire „jár közel" egymáshoz a két feltétel ? (1) és (2) egyemlősége egyenletet ad α-ra:

$$\cos(45° - \alpha) = \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} = 0{,}9259,$$

$\alpha = 22°48'$, vagyis kb. 0,3° az eltérése 22,5°-tól.



2. A lapunk 32. kötetének (1966) 220. oldalán hirdetett pályázat összefüggést keresett a háromszög oldalai között, ha a súlypont rajta van a beírt kör kerületén. Ez: $6(ab + bc + ca) - 5(a^2 + b^2 + c^2) = 0$, átrendezéssel: $3(a + b)^2 + 6(a + b)c - 8(a^2 + b^2) - 5c^2 = 0$, ebből is kiadódik az (1) egyenlet.