I. kategória: SzakközépiskolákElső (iskolai) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x + \sqrt[8]{x^5} - 12\sqrt[4]{x} = 0$$

egyenletet!

2. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyekben $\gamma = 60^\circ$, $b + c = 5a$, és az oldalak mérőszámai természetes számok. Mekkorák lehetnek ezen háromszögek oldalai? Határozza meg a feltételeket kielégítő háromszögek közül a legkisebb kerületű háromszöget!

3. Igazolja, hogy ha a, b, c, x, y, z 0-tól különböző valós számok és

$$a^2 + b^2 + c^2 = ax + by + cz \quad \text{és} \quad ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2,$$

akkor az

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

állandó érték!

4. Egy gúla alaplapja az ABC háromszög, (negyedik) csúcsa D. Az AD él harmadoló pontjai: H_1 és H_2 (H_1 van A-hoz közelebb), a CD él harmadoló pontjai: T_1 és T_2 (T_1 van C-hez közelebb). Síkokat fektetünk B. H_1, T_1, illetve B, H_2, T_2 pontokon át. Ezek a síkok a gúlát három részre vágják szét. Bizonyítsa be, hogy a középső rész térfogata a két szélső rész térfogatainak számtani közepe!

5. Oldja meg a $[0; 2\pi]$ halmazon a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sqrt{3} + \cos x}{2\sin^3 x - \cos x \cdot \sin 2x} > \frac{3}{2\sin 4x}.$$

6. Az ABC háromszögben $AC = 2AB$. Az AC oldal felezőpontja F. Az A csúcsból induló belső szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi.

a) Igazolja, hogy az $ABDF$ négyszög érintőnégyszög.

b) Az $ABDF$ négyszögbe írt kör sugarát jelölje r_1, az FDC háromszögbe írt kör sugarát r_2. Bizonyítsa be, hogy

$$1 \leq \frac{r_1}{r_2} < 2.$$

Második forduló

1. Felvettük az $ABCD$ négyzet síkjának ugyanazon az oldalán, a négyzet síkjára merőleges AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 szakaszokat.

Számítsa ki a DD_1 szakasz hosszúságát, ha $AA_1 = 10$ cm, $BB_1 = 8$ cm, $CC_1 = 6$ cm, és a négyzet belsejében létezik olyan O pont, amely az A_1, B_1, C_1, D_1 pontoktól egyenlő távolságra van.

2. Oldja meg a természetes számok halmazán az

$$\left[\sqrt{n}\right] = \frac{n-3}{5}$$

egyenletet! (Bármely $a \in \mathbf{R}$ esetén $[a]$ jelenti azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb a-nál.)

3. Az ABC háromszög AC oldalának tetszőleges P belső pontján át húzzunk párhuzamost az A és a C csúcsokból induló AK és CL súlyvonalakkal. A meghúzott egyenesek a BC oldalat E, az AB oldalt F pontban metszik. Igazolja, hogy az AK és a CL súlyvonalak az EF szakaszt három egyenlő részre osztják!

4. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges háromszögben

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{ab} + \frac{\cos\beta\cos\gamma}{bc} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{ca} = \frac{\sin^2\alpha}{a^2},$$

ahol α, β, γ a háromszög szögei, és a velük szemközti oldalak rendre a, b, c.

5. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek kielégítik a

$$7x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 7xy + 5yz = 0$$

egyenletet, és amelyekre az

$$(x + 2y - z - 1)^2 + (y - 2z + x - 1)^2 + (z + 2x - y - 1)^2$$

kifejezés a szélsőértékét veszi fel! Adja meg a szélsőérték nagyságát is!

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$(3x^2 - 4x + 1)^3 + (x^2 + 4x - 5)^3 = 64(x^2 - 1)^3$$

egyenletet!

2. Az ABC háromszög BC oldalán adott a P és a Q pont úgy, hogy

$$BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3.$$

Az AC oldalt az R pont $AR : RC = 1 : 2$ arányban osztja. A BR szakasz az AP szakaszt T, az AQ szakasz S pontban metszi. Az ABC háromszög területe t. Igazolja, hogy a $PQST$ négyszög területe $\frac{5}{24}t$.

3. Bizonyítsa be, hogy bármely közvetlenül egymás után következő 1997 darab pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám!

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumokElső (iskolai) forduló

1. Az a és b pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2}.$$

2. Egy sorozatban $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, ha $n > 1$. Állítsuk elő a_n-et n függvényeként.

3. Az $ABCD$ paralelogramma ABC háromszögének AC oldalához írt kör (azaz: külső érintő kör) a BA, ill. BC egyeneseket az X, ill. az Y pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az XY egyenes az ACD háromszög beírt körét az AD, ill. a CD oldalakon metszi.

4. Egy 7 egység oldalú négyzetben elhelyezünk 51 pontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek között a pontok között van 3 olyan, amely lefedhető egy egységsugarú körrel.

5. Adjuk meg azokat a nemnegatív egészekből álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x^2 + y} - \sqrt{x - y} \leq \sqrt{x + y}.$$

Második forduló

1. 2000 különböző pozitív egész szám fele páros, fele pedig páratlan; összegük kisebb 3 000 000-nál. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 3-mal osztható.

2. A hegyesszögű ABC háromszög köré írt A és B pontjaiban húzott érintők az S pontban metszik egymást. Az AB és CS egyenesek metszéspontját jelölje M. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

3. Egy egyenes csonkakúp alapkörének a sugara R, fedőköréé r, magassága pedig m; ezekre az $R - r < m$ feltétel teljesül. Beírtünk ebbe egy forgáshengert, amelynek alapköre a csonkakúp alapkörével koncentrikus, a fedőlapját határoló kör pedig a csonkakúp palástján van, és különbözik a csonkakúp fedőkörétől. Tudjuk, hogy a csonkakúpba írható ilyen hengerek közül ez a maximális térfogatú, sőt a maximális felszínű is.

Bizonyítsuk be, hogy ha a csonkakúp alkotóinak és a forgástengelyének a hajlásszöge α, akkor $\operatorname{tg} \alpha = 1/4$.

4. Legyen s pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy s-nek van olyan egész számú többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyek összege s-sel egyenlő.

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy konvex ötszög valamennyi átlója párhuzamos az ötszög egy-egy oldalával. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik átló és a vele párhuzamos oldal hosszának az aránya ugyanaz, és határozzuk is meg ennek az aránynak a számértékét.

Mutassuk meg, hogy ha a síkon adottak a nem egy egyenesre eső A, B, C pontok, akkor létezik olyan $ABCDE$ ötszög, amely a fenti tulajdonságú.

2. Legyen n pozitív egész. Milyen n-ekre teljesül, hogy

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

ahol d_1, d_2, d_3, d_4 az n szám négy legkisebb pozitív egész osztója?

3. Hány olyan számhármas létezik, amelyek egy pozitív egész hányadosú mértani sorozat egymást követő elemei, és amelynek minden eleme pozitív egész osztója $N = 90\,000$-nek?

Hány ilyen számhármas létezik $N = 30^{10}$ esetén?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első forduló

1. Egy bizottság pályázatokat rangsorol úgy, hogy a bizottság minden tagja külön-külön készít egy teljes rangsort valamennyi pályázatról. Tudjuk, hogy a bizottsági tagok többségének a rangsorában az A pályázat előrébb szerepel, mint a B pályázat, és azt is tudjuk, hogy a tagok többségének a rangsorában a B pályázat előrébb szerepel, mint a C pályázat. Következik-e ebből, hogy a tagok többségének a rangsorában az A pályázat előrébb szerepel, mint a C pályázat?

2. Egy hegyesszögű háromszög oldalai legyenek a, b, c, a megfelelő magasságvonalak m_a, m_b, m_c, és a magasságpontnak a csúcsoktól való távolságai rendre d_a, d_b, d_c. Bizonyítsuk be, hogy

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

3. Legyen az ABC háromszög köré írt sugara r, a súlypontot a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja pedig F. Bizonyítsuk be, hogy

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3r^2.$$

4. Egy dobozban 4 fehér és 4 piros golyó van. Visszetevés nélkül kihúzzuk az összes golyót. Minden húzás előtt tippelhetünk a kihúzandó golyó színére. Átlagosan hány találat érhető el, ha mindig arra a színre tippelünk, amelyiknek nagyobb a valószínűsége?

5. Adjuk meg az összes olyan köbszámot, amely előáll nyolc szomszédos egész szám köbének az összegeként. (Köbszámon egy egész szám köbét értjük.)

Második (döntő) forduló

1. Tekintsünk 1997 különböző pozitív egészt, amelyek közül bármely tíznek ugyanaz a legkisebb közös többszöröse. Maximálisan hány szám lehet közöttük, amelyek páronként relatív prímek (azaz közülük semelyik kettőnek sincs egynél nagyobb közös osztója)?

2. Legyenek AB és CD egy kör húrjai, amelyeknek nincs közös pontjuk, továbbá K a CD húr egy belső pontja. Szerkesszük meg a kör kerületén a P pontot úgy, hogy a CD húrnak az ABP háromszögbe eső szakaszát a K pont felezze.

3. Adott a síkon 111 egységvektor, amelyek összege a zérusvektor. Bizonyítsuk be, hogy közülük kiválasztható 55 olyan, amelyek összegének a hossza legfeljebb 1.

Az 1996/97. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny eredményei

I. kategória
(A szakközépiskolák tanulói)

I. díj:Varga Áron IV. o., Budapest, Trefort Á. Kéttannyelvű Műsz. Szki és Gimn., Felkészítő tanár: Varsóci Károly

II. díj:Hegedűs Miklós III. o., Debrecen, Gábor Dénes Elektronikai Műsz. Középisk., Felkészítő tanár: Gyebnárné Nagy Andrea

III. díj:Mészáros Attila IV. o., Budapest, Hunfalvy J. Külker. Közgazd. Szki. és Gimn., Felkészítő tanár: Plánk Tibor

4.Dávid Gábor IV. o., Szekszárd, Ady Endre Középiskola és Szki., Felkészítő tanár: Csapó Eszter

5.Szűcs Attila IV. o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki., Felkészítő tanár: Töricht Pál, Árokszállási Tibor

6.Markó Csaba III. o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki., Felkészítő tanár: Árokszállási Eszter

7.Kiss József IV. o., Győr, Jedlik Ányos Informatikai Szki. és Gimn., Felkészítő tanár: Honti Dénesné

8.Megyes Szabolcs IV. o., Budapest, Szent István Közgazdasági Szki., Felkészítő tanár: Agócs László

9.Dani Hajnalka IV. o., Szeged, Kőrösy J. Közgazdasági és Külker. Szki., Felkészítő tanár: Szalai Éva

10.Nagy Judit IV. o., Miskolc, Fáy András Közgazdasági Szki., Felkészítő tanár: Kállai Edit

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Richter János*, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola; **12.** *Pap Gábor*, IV. o., Budapest, Trefort Á. Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **13.** *Vincicki Norbert*, III. o., Nyíregyháza, Széchenyi István Közgazdasági Szki.; **14.** *Ring Ildikó*, IV. o., Győr, Krúdy Gyula Vendéglátóipari Szki. és Gimn.; **15.** *Kovács Roland*, IV. o., Dunaújváros, Rudas Közgazdasági Középiskola és Koll.; **16.** *Rózsa Tamás*, III. o., Szolnok, Pálfy J. Műszeripari és Vegyipari Szki.; **17.** *Ács Gábor*, IV. o., Eger, Neumann János Közg. Szki és Gimn.; **18.** *Imecs Dániel*, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola; **19.** *Gáborik István*, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola; **20.** *Szabó Péter*, IV. o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki.; **21.** *Nováki Szilárd,* IV. o., Eger, Wigner Jenő Műszaki Informatikai Középiskola; **22.** *Lublóy Katalin,* IV. o., Szombathely, Orlay Fürst Károly Külkereskedelmi Szki.; **23.** *Szénási Tamás,* IV. o., Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum; **24.** *Hajdú Attila,* IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola; **25.** *Csóka Péter,* IV. o., Fehérgyarmat, Petőfi Sándor Közgazdasági Szki.; **26.** *Elek Róbert,* IV. o., Budapest, Kalmár László Számítástechnikai Szki.; **27.** *Stiller Gábor,* IV. o., Budapest, Neumann János Számítástechnikai Szki.; **28.** *Lefánti Krisztina,* IV. o., Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gyak. Közgazd. Szki.; **29.** *Szép Gábor,* IV. o., Székesfehérvár, Gróf Széchenyi István Műszaki Szki.; **30.** *Gyarmathy Orsolya,* IV. o., Győr, Krúdy Gyula Vendéglátóipari Szki. és Gimn.; **31.** *Löffler Szabolcs,* III. o., Eger, Neumann János Közg. Szki. és Gimn.

II. kategória
(Nem speciális matematika tantervű gimnáziumok tanulói)

I. díj:Kiss Gergely IV. o., Budapest, Szent lstván Gimnázium, Felkészítő tanár: Lászlóné Sergyán Stefánia

I. díj:Szabó Jácint IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium, Felkészítő tanár: Zsebők Ottó

III. díj:Kővágó Tamás IV. o., Kecskemét, Bolyai János Gimnázium, Felkészítő tanár: Varga József

4.Bakos Péter IV. o., Eger, Szilágyi Erzsébet Gimnázium, Felkészítő tanár: Burom Mária

5.Pintér Dömötör IV. o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, Felkészítő tanár: Asbóth József, Peresztegi László, Pósa Lajos

6.Szász Bence III. o., Budapest, Eötvös József Gimnázium, Felkészítő tanár: Gyengéné Beé Andrea, Somfai Zsuzsanna

7.Megyeri Csaba IV. o., Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium,
Felkészítő tanár: Dr Pintér Ferenc

8.Hajdufi Péter III. o., Budapesti Baár-Madas Református Gimn.,
Felkészítő tanár: Madas Pál, Székely Péter

9.Purger Norbert III. o., Kecskemét, Katona József Gimnázium,
Felkészítő tanár: Szabó István

10.Csalogány Károly IV. o., Salgótarján, Bolyai János Gimnázium,
Felkészítő tanár: Dr Peák Istvánné

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Blaskó Ádám,* IV. o., Budapest, Eötvös József Gimnázium; **12.** *Darnai Attila,* IV. o., Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; **13.** *Lele János,* III. o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; **14.** *Szabó Eszter,* IV. o., Sárvár, Tinódi Sebestyén Gimnázium; **15.** *Tóth Lóránt,* IV. o., Miskolc, II., Herman Ottó Gimnázium; **16.** *Wagner Róbert,* IV. o., Pannonhalmi Bencés Gimnázium; **17.** *Papp Ágnes,* IV. o., Kecskeméti Református Koll. Gimnáziuma; **18.** *Szita István,* IV. o., Körmend, Kölcsey Ferenc Gimnázium; **19.** *Bojti Beáta,* IV. o., Budapest, Szent István Gimnázium; **20.** *Fazekas Borbála,* IV. o., Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnáziuma; **21.** *Fekete Márk,* IV. o., Miskolc, Herman Ottó Gimnázium; **22.** *Sarlós Ferenc,* III. o., Baja, III. Béla Gimnázium; **23.** *Csontos Péter,* IV. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; **24.** *Páles Csaba,* III. o., Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnáziuma; **25.** *Hartmann Miklós,* III. o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium; **26.** *Bárány Péter,* IV. o., Budapest, Lauder J. Zsidó Közösségi Iskola; **27.** *Árva Péter,* IV. o., Budapest, Károlyi M. Magyar–Spanyol Gimnázium; **28.** *Koch József,* III. o., Nyíregyháza, Szent Imre Katolikus Gimnázium; **29.** *Víg Anikó,* IV. o., Pápai Református Gimnázium; **30.** *Balogh Endre,* IV. o., Budapest, Szent István Gimnázium.

III. kategória
(A speciális matematika tantervű gimnáziumok tanulói)

I. díj:Pap Gyula IV. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium,
Felkészítő tanár: Balázs Tivadar

II. díj:Braun Gábor IV. o., Budapest, Szent István Gimnázium,
Felkészítő tanár: Halek Tamás

III. díj:Lippner Gábor III. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
Felkészítő tanár: Dobos Sándor, Thiry Imréné, Pósa Lajos

4.Kiss László IV. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
Felkészítő tanár: Laczkó László

5.Koncz Imre IV. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
Felkészítő tanár: Laczkó László

6.Várkonyi Péter IV. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
Felkészítő tanár: Laczkó László

7.Berki Csaba IV. o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium,
Felkészítő tanár: Ponácz Ferenc, Horváth Gábor

8.Pogány Ádám III. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
Felkészítő tanár: Dobos Sándor, Thiry Imréné

9.Salamon Gábor IV. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
Felkészítő tanár: Laczkó László

10.Katona Zsolt III. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
Felkészítő tanár: Dobos Sándor, Fazakas Tünde

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Nyul Gábor,* III. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium; **12.** *Zawadowski Ádám,* III. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **13.** *Tóth Ádám,* III. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **14.** *Zakariás Ildikó,* IV. o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium; **15.** *Frenkel Péter,* IV. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **16.** *Visontai Mirkó,* IV. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **17.** *Nyakas Péter,* IV. o., Zalagerszeg; Zrínyi Miklós Gimnázium; **18.** *Kenyeres Márton,* IV. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **19.** *Bakonyi Gábor,* IV. o., Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium; **20.** *Sulyok Ádám,* IV. o., Budapest, Szent István Gimnázium.